

ÁLGEBRA LINEAL.

Rango y Núcleo de una Aplicación Lineal.

Definición 1. Sean V y W dos espacios vectoriales y una aplicación lineal entre ellos

$$f : V \rightarrow W.$$

A) Se llama **Imagen** o **Rango** de f al conjunto de W

$$Imf = \{u \in W : \text{existe } v \in V \text{ tal que } f(v) = u\}$$

B) Se llama **Núcleo** de f al conjunto de V tal que

$$Kerf = \{v \in V : f(v) = 0\}$$

Una observación sencilla nos convence que $0 \in Kerf$, pero también $0 \in Imf$.

Proposición 1. El **núcleo** y el **rango** de una aplicación lineal

$$f : V \rightarrow W$$

son subespacios vectoriales de V y W respectivamente.

Demostración: a) Si $v_1, v_2 \in Kerf$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2) = 0.$$

Esto prueba que $\lambda v_1 + v_2 \in Kerf$ y por tanto que es un subespacio vectorial de V .

b) Si $w_1, w_2 \in Imf$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existen $v_1, v_2 \in V$ con $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$. Entonces

$$f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2) = \lambda w_1 + w_2.$$

Hemos visto que $\lambda w_1 + w_2 \in Imf$, por tanto el rango de f es un subespacio vectorial de W \square

Proposición 2. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Son equivalentes:

- a) f es **inyectiva**, es decir no existen $u \neq v$ tal que $f(u) = f(v)$.
 ■ $\text{Ker} f = \{0\}$.

Demostración: Si $f(u) = f(v)$, entonces $f(u - v) = 0$ y como $\text{Ker} f = 0$, se sigue que $u = v$. Al contrario, si f es inyectiva y como $f(0) = 0$, entonces solo puede ocurrir que $\text{Ker} f = \{0\}$ □

Ejemplo 1. Sea $f(x, y) = (x + y, -y, y - x)$ una aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Demostración: El núcleo de la aplicación es

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad f(x, y) = (0, 0, 0)$$

es decir aquellos (x, y) para los cuales

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -y = 0 \\ y - x = 0. \end{cases}$$

La única solución de este sistema es $(x, y) = (0, 0)$, luego $\text{Ker} f = \{0\}$. De lo que deducimos que f es inyectiva.

Por otra parte

$$\begin{aligned} \text{Im} f &= \{(x + y, -y, y - x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(1, -1, 1) : x, y \in \mathbb{R}\} = \\ &= L[(1, 0, -1), (1, -1, 1)]. \end{aligned}$$

Como los vectores $(1, 0, -1)$ y $(1, -1, 1)$ son linealmente independientes, la $\text{Im} f$ tiene dimensión dos y los vectores $\{(1, 0, -1), (1, -1, 1)\}$ forman una imagen de $\text{Im} f$.

Observemos que los vectores $(1, 0, -1)$ y $(1, -1, 1)$ son las imágenes por la aplicación f de los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, base canónica de \mathbb{R}^2 . De hecho, la forma matricial de f viene dada por

$$f(x, y) = (v_1 v_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \square$$

En este ejemplo, como en los anteriores, se verifica la siguiente fórmula:

$$\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = 0 + 2 = 2.$$

Veremos que este es un resultado general.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

Email address: `Cesar.Ruiz@mat.ucm.es`