

ÁLGEBRA LINEAL.

Homomorfismos.

En Teoría de Álgebra Lineal a las aplicaciones lineales se les llama también **Homomorfismos** de espacios vectoriales, ya que conservan las operaciones propias de los espacios vectoriales.

Definición 1. Sean V y W dos espacios vectoriales y una aplicación entre ellos

$$f : V \rightarrow W.$$

- A) Si f es lineal, también se le llama **homomorfismo**.
- B) Si f es lineal e inyectiva se le llama **monomorfismo**.
- C) Si f es lineal y suprayectiva se le llama **epimorfismo**.
- D) Si f es lineal y biyectiva se le llama **isomorfismo**.
- E) Si $V = W$, a un homomorfismo se le denomina **endomorfismo**.
- F) Un endomorfismo biyectivo se le denomina **automorfismo**.

Observación 1. Sea V es un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{R} y

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

es un base de V , entonces

$$V = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\} =$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es fácil ver que la aplicación lineal

$$T : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k & \rightarrow & T(v) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{array}$$

es un **isomorfismo**. Así los espacios vectoriales V y \mathbb{R}^n expresados en coordenadas respecto de las bases $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ respectivamente son iguales (incluida la forma de operar con los vectores en coordenadas).

Ejemplo 1. Sea la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow f(x, y) = (x, -y). \end{aligned}$$

Esta aplicación es lineal e inyectiva (claro, $f(x, y) = (0, 0)$ implica $x = 0$ e $y = 0$). También es suprayectiva ($\text{Im}f = \{x(1, 0) + y(0, -1) : x, y \in \mathbb{R}\}$).

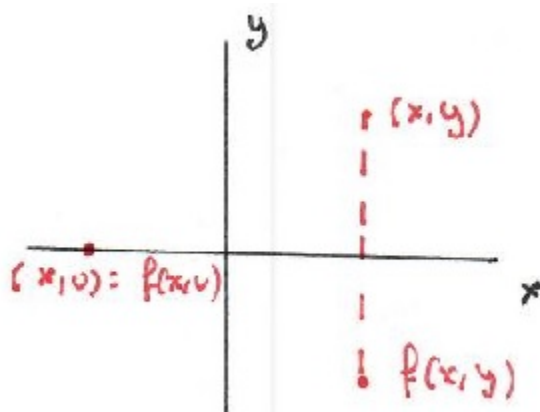


FIGURA 1. Simetría.

Así f es un **automorfismo**. Geométricamente es una simetría con eje de simetría el eje de abscisas ($y = 0$) \square

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es