

ÁLGEBRA LINEAL.

Fórmula de la Dimensión.

Ya estamos preparados para dar la Fórmula de la Dimensión. Veremos como esta fórmula nos permite determinar la dimensión de las soluciones de un sistema compatible indeterminado.

Teorema 1. *Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Si V está finitamente generado, entonces*

$$\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

Demostración: Pongamos que $n = \dim V$. $\text{Ker } f$ es un subespacio de V , por tanto le podemos encontrar una base

$$\text{Ker } f = L[v_1, \dots, v_k], \quad \text{con} \quad k \leq n.$$

Ponemos encontrar vectores u_{k+1}, \dots, u_n hasta completar una base de V , es decir

$$V = L[v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n].$$

El subespacio generado por los vectores u_{k+1}, \dots, u_n es complementario a $\text{Ker } f$. Claro si $u = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j u_j \neq 0$, entonces

$$f(u) \neq 0,$$

ya que en otro caso u pertenecería a $\text{Ker } f$, así $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$. Entonces

$$\sum_{j=k+1}^n \lambda_j u_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0,$$

lo que contradice la independencia de los vectores de la base de V .

Veamos ahora que

$$\text{Im } f = L[f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)].$$

Claramente $L[f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)] \subset \text{Im}f$. Ahora si $w \in \text{Im}f$, existe

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j u_j \in V$$

de modo que $f(v) = w$. Como

$$w = f(v) = f\left(\sum_{j=k+1}^n \lambda_j u_j\right) = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j f(u_j) \in L[f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)].$$

Observemos que $\dim L[f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)] = n - k$. Si no fuese así, los vectores $f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)$ no serían linealmente independiente. Podríamos encontrar $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, de modo que

$$0 = \sum_{j=k+1}^n \lambda_j f(u_j) = f\left(\sum_{j=k+1}^n \lambda_j u_j\right),$$

luego $\sum_{j=k+1}^n \lambda_j f(u_j) \in \text{Ker}f$ lo cuál no es posible como vimos arriba.

Así $\{f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)\}$ forman una base de $\text{Im}f$. Por tanto $\dim \text{Im}f = n - k$. Ahora ya podemos comprobar que

$$n = \dim V = \dim \text{Ker}f + \dim \text{Im}f = k + (n - k) \quad \square$$

Ejemplo 1. El espacio vectorial V_3 lo tenemos dado por dos bases

$$V_3 = L[u_1, u_2, u_3] = L[v_1, v_2, v_3].$$

Tenemos la aplicación lineal $f : V_3 \rightarrow V_3$ que transforma:

$$f(u_1) = v_1 + v_3, \quad f(u_2) = 2v_1 - v_2, \quad y \quad f(u_3) = v_2 - v_3.$$

Vamos a investigar este endomorfismo.

Demostración:

- a) La matriz de la aplicación referida a las bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$ será la siguiente. Si

$$u = \sum_{k=1}^3 \lambda_k u_k \quad y \quad f(u) = \sum_{k=1}^3 \eta_k v_k,$$

entonces

$$f(u) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ya que

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{k=1}^3 \lambda_k f(u_k) = \lambda_1(v_1 + v_3) + \lambda_2 2(v_1 - v_2) + \lambda_3(v_2 - v_3) = \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2)v_1 + (-\lambda_2 + \lambda_3)v_2 + (\lambda_1 - \lambda_3)v_3 = \\ &= \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + \eta_3 v_3. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{cases} \eta_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \eta_2 = -\lambda_2 + \lambda_3 \\ \eta_3 = \lambda_1 - \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Observemos que las columnas de esta matriz son las coordenadas de $f(u_1)$, $f(u_2)$ y $f(u_3)$ referidas a las base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

■ Ahora

$$\text{Ker } f = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0\}.$$

Los elementos de $\text{Ker } f$ son por tanto las soluciones del sistema

$$\begin{array}{lll} 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_3 & \Leftrightarrow 0 = -\lambda_2 + \lambda_3 & \Leftrightarrow 0 = -\lambda_2 + \lambda_3 \\ 0 = \lambda_1 - \lambda_3 & 0 = -2\lambda_2 - \lambda_3 & 0 = -3\lambda_3 \end{array}.$$

Este sistema tiene una única solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Luego

$$\text{Ker } f = \{0\}.$$

Esto quiere decir que f es inyectiva.

■ Como $\dim \text{Ker } f = 0$, la fórmula de la dimensión nos dice que

$$\dim V = 3 = \dim \text{Im } f.$$

De esto deducimos que la aplicación f es suprayectiva. Por lo tanto f es biyectiva. Así f es un isomorfismo de un espacio en si mismo (un automorfismo; aunque los nombres no importan mucho) \square