

## ÁLGEBRA LINEAL.

### Desarrollo de un Determinante por Filas o por Columnas.

El siguiente procedimiento permite calcular determinantes de orden  $n$  en función de determinantes de orden  $n - 1$ .

**Definición 1.** Sea  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$  una matriz cuadrada y nos fijamos en una entrada  $a_{i,j}$ .

**A)** Se llama **menor complementario** del elemento  $a_{i,j}$  a la matriz  $D_{i,j} \in M_{n-1}$  que se consigue al quitar la fila  $i$  y la columna  $j$  a la matriz  $A$ .

**B)** Se llama **adjunto** (o complemento algebraico) del elemento  $a_{i,j}$  a la matriz de orden  $n - 1$

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} D_{i,j}.$$

Para el determinante  $|A|$  y el elemento  $a_{i,j}$  al determinante  $|D_{i,j}|$  se le llama **menor complementario**. A  $(-1)^{i+j} |D_{i,j}|$  **adjunto** al elemento  $a_{i,j}$ . Se suele notar, también,

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} |D_{i,j}|.$$

Vamos a relacionar el valor de  $|A|$  con los valores de  $|D_{i,j}|$ .

**Lema 1.** Si en un determinante  $|A|$  todas las entradas de una columna (o fila) son nulas salvo una, entonces el valor de  $|A|$  es igual a la entrada no nula por su determinante adjunto.

**Demostración:** Haremos la prueba por columnas (en el caso de filas se pasa a la matriz transpuesta). En primer lugar supondremos que

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

después reduciremos el caso general a lo visto para este caso. Por la definición de determinante

$$|A| = \sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} a_{f(1),1} \cdots a_{f(n),n} =$$

como  $a_{i,1} = 0$ , salvo para  $a_{1,1}$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{f \in S_n; f(1)=1} (-1)^{[f]} a_{1,1} a_{f(2),2} \cdots a_{f(n),n} = \\ & a_{1,1} \sum_{f \in S_n; f(1)=1} (-1)^{[f]} a_{f(2),2} \cdots a_{f(n),n} \quad (*). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} T : S_{n-1} & \rightarrow \{f \in S_n : f(1) = 1\} \\ g & \rightarrow T(g) = f(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 1 \\ g(k-1) + 1 & \text{para } k > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

es una biyección y que  $[g] = [Tg]$ . Luego (\*) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & a_{1,1} \sum_{g \in S_{n-1}} (-1)^{[g]} a_{Tg(2),2} \cdots a_{Tg(n),n} = \\ & a_{1,1} \sum_{g \in S_{n-1}} (-1)^{[g]} b_{g(1),1} \cdots b_{g(n-1),n-1} = a_{1,1} A_{1,1} \end{aligned}$$

donde hemos notado

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

En el caso general tenemos

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

intercambiando la fila  $i$  por la  $i - 1$ , después ésta por la  $i - 2$ , hasta llevar a la fila  $i$  a la primera fila

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

ahora desplazando la columna  $j$  hasta la primera columna

$$(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

usando la primera parte de las prueba

$$(-1)^{i+j} a_{i,j} |D_{i,j}| = a_{i,j} |A_{i,j}| \quad \square$$

**Ejemplos 1.**     $\blacksquare$   $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(1 - 2) = 2.$

$$\blacksquare \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

si a la tercera fila le restamos la primera

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la primera columna

$$1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la última fila

$$1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \quad \square$$

**Teorema 1.** *Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por los correspondientes adjuntos, es decir si  $A = (a_{i,j}) \in M_n$*

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j}|D_{i,j}| =$$

$$a_{i,1}(-1)^{i+1}|D_{i,1}| + a_{i,2}(-1)^{i+2}|D_{i,2}| + \dots + a_{i,n}(-1)^{i+n}|D_{i,n}|$$

*desarrollo del determinante por al fila i,*

*o bien*

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j}|D_{i,j}| =$$

$$a_{1,j}(-1)^{1+j}|D_{1,j}| + a_{2,j}(-1)^{2+j}|D_{2,j}| + \dots + a_{n,j}(-1)^{n+j}|D_{n,j}|$$

*desarrollo del determinante por al columna j.*

**Demostración:** Observemos que en dos matrices iguales salvo en una columna ( o fila), los menores asociados a los elementos de la columna ( o fila) distinta son iguales.

Vamos a hacer la prueba para el desarrollo por columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & (a_{1,j} + 0 + \dots + 0) & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & (0 + \dots + 0a_{i,j} + 0 + \dots + 0) & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & (0 + \dots + 0 + a_{n,j}) & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

desarrollando estos determinantes según el Lema anterior

$$a_{1,j}(-1)^{1+j}|D_{1,j}| + a_{2,j}(-1)^{2+j}|D_{2,j}| + \dots + a_{n,j}(-1)^{n+j}|D_{n,j}| = \sum_{i=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j}|D_{i,j}| \quad \square$$

**Ejemplo 1.** Queremos resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x+4 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3x+6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Demostración:** Aunque no es necesario, podemos resolver el sistema de arriba intercambiando filas

$$0 = - \begin{vmatrix} 1 & 3x+6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & x+4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ahora vamos a desarrollar el determinante por la primera columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 3x+6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & x+4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ x+4 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3x+6 & 3 \\ x+4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3x+6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$[-4 - (x+4)] - 2[-6 - 3x - 3x - 12] + [3x+6 - 12] =$$

$$-8 - x + 36 + 12x + 3x - 6 = 14x + 22$$

así, despejando

$$x = \frac{-22}{14} = -\frac{11}{7} \quad \square$$

**Ejemplo 2.** Queremos resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & b & b & b \\ b & b & x & c & c \\ c & c & c & x & d \\ d & d & d & d & x \end{vmatrix} = 0.$$

**Demostración:** Aunque no es necesario, podemos resolver el problema transponiendo la matriz, el determinante no cambia,

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix} = 0$$

Vamos a desarrollar el determinante. Si hacemos, por este orden  $F_5 - F_4, F_4 - F_3, F_3 - F_2$  y  $F_2 - F_1$ , tenemos

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a-x & x-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-x & x-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-x & x-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-x & x-d \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la primera columna

$$x \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ b-x & x-b & 0 & 0 \\ 0 & c-x & x-c & 0 \\ 0 & 0 & d-x & x-d \end{vmatrix} - (a-x) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b-x & x-b & 0 & 0 \\ 0 & c-x & x-c & 0 \\ 0 & 0 & d-x & x-d \end{vmatrix} =$$

el primer determinante es triangular, el segundo lo desarrollamos por la primera columna,

$$x(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - (a-x) \left[ a \begin{vmatrix} x-b & 0 & 0 \\ c-x & x-c & 0 \\ 0 & d-x & x-d \end{vmatrix} - (b-x) \begin{vmatrix} b & c & d \\ c-x & x-c & 0 \\ 0 & d-x & x-d \end{vmatrix} \right] =$$

de nuevo el primer determinante es triangular

$$x(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + a(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + (x-a)(x-b) \begin{vmatrix} b & c & d \\ c-x & x-c & 0 \\ 0 & d-x & x-d \end{vmatrix} =$$

desarrollando el determinante por la primera columna

$$\begin{aligned} & [x+a](x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + \\ & (x-a)(x-b) \left[ b \begin{vmatrix} x-c & 0 \\ d-x & x-d \end{vmatrix} - (c-x) \begin{vmatrix} c & d \\ d-x & x-d \end{vmatrix} \right] = \\ & [x+a](x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + b(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + \\ & (x-a)(x-b)(x-c)[c(x-d) - d(d-x)] = \\ & [x+a+b+c+d](x-a)(x-b)(x-c)(x-d). \end{aligned}$$

Igualando a cero, vemos que las soluciones de la ecuación son

$$\{a, b, c, d, -a - b - c - d\} \quad \square$$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN  
*Email address:* Cesar\_Ruiz@mat.ucm.es