ÁLGEBRA LINEAL.

Determinante de un Producto.

El desarrollo por filas o por columnas de un determinante es un caso particular del llamado Teorema de Laplace. Veamos que dice este teorema.

Definición 1. *Dados una matriz $A = (a_{i,j}) \in M_n$, $k \in \mathbb{N}$, con $k < n$, y elegidas $p_1, p_2, ..., p_k$ filas y $q_1, q_2, ..., q_k$ columnas:*

A) *llamamos **menor de orden** k formado por las k filas y columnas anteriores a la matriz de orden k*

$$D\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{p_1,q_1} & \cdots & a_{p_1,q_j} & \cdots & a_{p_1,q_k} \\ \vdots & & & & \\ a_{p_i,q_1} & \cdots & a_{p_i,q_j} & \cdots & a_{p_i,q_k} \\ \vdots & & & & \\ a_{p_k,q_1} & \cdots & a_{p_k,q_j} & \cdots & a_{p_k,q_k} \end{pmatrix}.$$

Este menor se ha obtenido por eliminación de $n-k$ filas y $n-k$ columnas.

B) *Al menor de orden $n-k$ $D\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-k} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-k} \end{pmatrix}$, donde $r_1, ..., r_{n-k}$ son las filas y $s_1, ..., s_{n-k}$ las columnas eliminadas en*

$$D\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix}$$

*se le llama **menor complementario**.*

C) *A*

$$(-1)^{p_1+p_2+...+p_k+q_1+....+q_k} D\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-k} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-k} \end{pmatrix} =_{\textit{notación}} A\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix}$$

*se le llama **adjunto** del menor $D\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix}$.*

Ejemplo 1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$.

Demostración: $D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$ y
$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{2+3+1+3} D\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$ $\square$

Observemos que $D\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = a_{i,j}$; y que $A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = A_{i,j}$, el adjunto de la entrada $a_{i,j}$.

Observación 1. *Si* $|A|$ *es un determinante, el menor de orden* k *formado por* $D\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix}$, *se entiende como el determinante*

$$\left| D\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix} \right|$$

Se entiende como adjunto

$$A\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix} = (-1)^{p_1+p_2+\ldots+p_k+q_1+\ldots.+q_k} \left| D\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-k} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-k} \end{pmatrix} \right|.$$

Teorema 1. *(**de Laplace**) Sea* $A = (a_{i,j}) \in M_n$ *y sea* $k \in \mathbb{N}$ *con* $k < n$. *Fijadas* $p_1, \ldots., p_k$ *filas (o columnas), entonces el determinante* $|A|$ *es igual a la suma de los productos de todos los determinantes de menores de orden* k*, que continen las filas elegidas, con los determiantes de sus adjuntos, es decir*

$$|A| = \sum_{q_1<q_2<\ldots<q_k} \left| D\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix} \right| A\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$, $p_1 = 2$ *y* $p_2 = 3$.

Demostración: El desarrollo del determinante de A en menores de orden 2 fijadas las filas 2 y 3 es

$$|A| = \left| D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \left| D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} +$$

$$\left| D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right| A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \left| D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right| A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} +$$

$$\left|D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right| A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \left|D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Como se ve en el ejemplo anterior, no es muy práctico para el cálculo de determinante el método de descomposición de un determinante comosumade productos de menores de orden k para $k > 1$. Sin embargo el Teorema de Laplace se usa para probar el siguiente que si es muy útil.

Teorema 2. *Si* $A, B \in M_n$*, entonces*

$$|AB| = |A|\,|B|.$$

Como corolario tenemos que:

Corolario 1. *Si* $A \in M_n$ *es invertible, entonces*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Demostración: Primero $|AA^{-1}| = |I| = 1$. Ahora usando el Teorema

$$|AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|.$$

Usando ambas cosas y despejando

$$|A|\,|A^{-1}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \qquad \square$$

Demostración: (del Teorema)

$$|A|\,|B| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix} =$$

usando el Teorema de Laplace, con un desarrollo de las n primeras filas

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & & -1 & b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix} =$$

eliminando los $a_{i,j}$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & & -1 & b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix} = ... =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=1}^n a_{n,k}b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{n,k}b_{k,n} \\ -1 & \cdots & 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & & -1 & b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & \text{AB} \\ \hline \text{-I} & \text{B} \end{array}\right| =$$

usando el Teorema de Laplace y desarrollando por la n primeras filas

$$|AB|(-1)^{(1+2+...+n)+((n+1)+(n+2)+....+2n))}|-I| =$$

$$|AB|(-1)^{(2n+1)n}(-1)^n = |AB| \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`