ÁLGEBRA PRÁCTICA-6

Nombre y apellidos..

1.- De las siguientes aplicaciones di cuáles son lineales y cuáles no. Resuelve las cuestiones que se piden.

1_1.- $f(x, y) = (x, x + y, 2y + x)$. Calcula unas ecuaciones y una base de $Kerf$.

f tiene una forma matricial $f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \rightarrow f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

y por tanto es una aplicación lineal.

$Ker f = \{(x,y) : f(x,y) = 0\} \iff \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x+y = 0 \\ x+2y = 0 \end{matrix}\right\}$ ecuaciones del núcleo.

como $x = 0$, y así $x + y = 0 + y = 0 \Rightarrow y = 0$, se sigue que $Ker f = \{(0,0)\}$ es de dimensión cero, no tiene base.

1_2.- $\begin{matrix} f & : & V = [v_1, v_2, v_3] & \rightarrow & W = [u_1, u_2] & \\ & & v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i & \rightarrow & f(v) & = & (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)u_1 + \lambda_3 u_2. \end{matrix}$ Calcula Imf.

$f(0) = f(\sum_{i=1}^{3} 0 v_i) = (0 + 0 + 1)u_1 + 0u_3 = u_1$. Luego f es lineal si $u_1 = 0$. En otro caso no es lineal

Por otro lado si $xu_1 + yu_2 \in W$ tomando

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -1 + x$ tenemos que $f(0v_1 + (-1+x)v_2 + yv_3) = xu_1 + yu_2$

$\lambda_3 = y$ luego $Im f = W$.

1_3.- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineal, de modo que $f(e_1) = (1, 2, 0)$, $f(e_2) = (3/2, 3, 0)$ y $f(e_3) = (6, 12, 0)$. Calcula la forma matricial de f y $dimImf$

$f(x,y,z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 6 \\ 2 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Forma matricial de f.

Por otro lado $Rang\ A_f = 1$, ya que solo hay una fila linealmente independiente. Así $dim\ Imf = 1$, ya que $Im f = [f(e_1), f(e_2), f(e_3)]$ y el $Rang\ A_f$ es igual al rango de estos tres vectores $f(e_1)$ $f(e_2)$ y $f(e_3)$

1_4.- $f : V = [v_1, v_2, v_3] \to W = [u_1, u_2, u_3, u_4]$, lineal, de modo que $f(v_1) = u_1 + u_2 + 2u_3 - u_4$, $f(v_3) = u_1 - u_2 + 3u_3$ y $v_2 \in Ker f$ ($\{v_i\}$ y $\{u_j\}$ son bases). Calcula la forma matricial de f y encuentra una base y unas ecuaciones para $Im f$.

SI $v \in V$, $f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i\right) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f(v_1)\ f(v_2)\ f(v_3) \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ FORMA MATRICIAL DE LA APLICACIÓN LINEAL

POR OTRO LADO $Im f = [f(v_1), f(v_2), f(v_3)] = [(1,1,2,-1), (1,-1,3,0)]$. (¡IMPORTANTE: LUEGO ESTOS DOS VECTORES FORMAN UNA BASE DE $Im f$. LAS COORDENADAS ESTÁN DADAS CON RESPECTO A LA BASE $\{u_j\}$!)

ASÍ SI $w = (w_1\ w_2\ w_3\ w_4) \in Im f \Rightarrow$
$w_1 = s + r$
$w_2 = s - r$
$w_3 = 2s + 3r$
$w_4 = -s$
$\Leftrightarrow$ $w_4 = -s$, $r = \frac{1}{3}(w_3 + 2w_4)$

LUEGO $w_1 = -w_4 + \frac{1}{3}(w_3 + 2w_4)$ y $w_2 = -w_4 - \frac{1}{3}(w_3 + 2w_4)$ SON UNAS ECUACIONES DE $Im f$ (¡COORDENADAS REFERIDAS A $\{u_j\}$!)

1_5.- $\begin{array}{rcl} T : C[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ f & \to & T(f) = \int_a^b f(t)dt, \end{array}$ donde $C[a,b]$ son las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Encuentra n funciones linealmente independientes en el $KerT$.

SABEMOS QUE $C[a,b]$ ES UN ESPACIO VECTORIAL.

AHORA SI $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C[a,b]$, TENEMOS

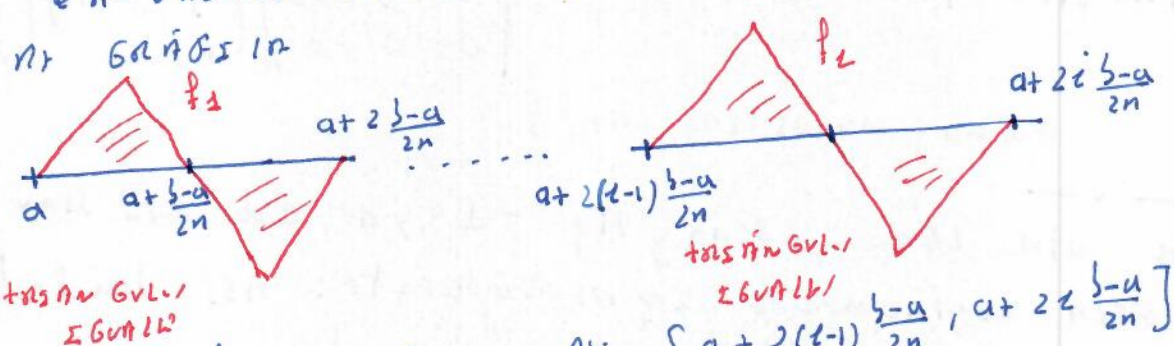
$T(\alpha f + g) = \int_a^b (\alpha f + g)(t)\,dt =$

$= \int_a^b \alpha f(t) + g(t)\,dt \underset{\uparrow}{=} \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt = \alpha T(f) + T(g)$.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

LUEGO LA APLICACIÓN T ES LINEAL.

POR OTRO LADO, DADO $n \in \mathbb{N}$, DIVIDIMOS $[a,b]$ EN $2n$-PARTES IGUALES Y LLAMAMOS f_i A LA FUNCIÓN DE GRÁFICA



DONDE $f_i \equiv 0$ FUERA DE $\left[a + 2(i-1)\frac{b-a}{2n}, a + 2i\frac{b-a}{2n}\right]$ $i = 1, 2, \dots n$.

ASÍ CLARAMENTE $\int_a^b f_i\,dt = 0$, ES DECIR $f_i \in Ker T$

y SI $0 = \sum \lambda_i f_i(t) = \lambda_j f_j(t)$ SI $t \in \left[a + 2(j-1)\frac{b-a}{2n}, a + 2j\frac{b-a}{2n}\right]$

LUEGO $\lambda_j = 0$. LO QUE PRUEBA QUE $f_1 \dots f_n$ SON INDEPENDIENTES.