ÁLGEBRA PRÁCTICA-7

Nombre y apellidos...

1.- Sea $f \in S_n$ una permutación. Consideramos la relación $i\,R\,j \Leftrightarrow j \in Orb_i f$. Prueba que R es una relación de equivalencia.

R ES REFLEXIVA : $i R i$, YA QUE $i \in Orb_i f = \{i, f(i), \dots, f^r(i)\}$

R ES SIMÉTRICA : SI $i R j$ EXISTE $1 \le k \le r$ CON $j = f^k(i)$.

AHORA $i = f^{r+1}(i) = f^{(r+1)-k}(f^k i) = f^{(r+1)-k}(j)$.

LUEGO $i \in Orb_j f \Rightarrow j R i$

R ES TRANSITIVA : SI $i R j$ Y ASÍ $j = f^k(i)$ $1 \le k \le r$ Y SI $j R p$ Y ASÍ $p = f^t(j)$ SE SIGUE QUE $p = f^t(j) = f^t(f^k(i)) = f^{t+k}(i)$ LUEGO $i R p$.

2.- Sea $\alpha \in S_n$ un ciclo con una única órbita no unitaria

$$Orb_{i_0}\alpha = \{ i_0, \alpha(i_0), ..., \alpha^r(i_0) \}.$$

Prueba que

$$\alpha = f_{i_0,\alpha^r(i_0)} \circ f_{i_0,\alpha^{r-1}(i_0)} \circ \dots\dots \circ f_{i_0,\alpha^2(i_0)} \circ f_{i_0,\alpha(i_0)}.$$

SI $j \notin Orb_{i_0}\alpha$, SE TIENE QUE $j \neq \alpha^k(i_0)$ PARA $0 \le k \le r$ Y POR TANTO $f_{i_0,\alpha^k(i_0)}(j) = j$ PARA $k = 0 \dots r$.

LUEGO $\alpha(j) = j = f_{i_0,\alpha^r(i_0)} \circ \dots \circ f_{i_0,\alpha(i_0)}(j)$

SI $j \in Orb_{i_0}\alpha$, $j = \alpha^k(i_0)$, $k = 0, \dots, r$, PARA $s < k$

$f_{i_0,\alpha^s(i_0)}(\alpha^k(i_0)) = \alpha^k(i_0)$

$f_{i_0,\alpha^k(i_0)}(\alpha^k(i_0)) = i_0$

$f_{i_0,\alpha^{k+1}(i_0)}(i_0) = \alpha^{k+1}(i_0)$

Y ASÍ $\alpha(j) = \alpha(\alpha^k(i_0)) = \alpha^{k+1}(i_0) = f_{i_0\alpha^r(i_0)} \circ \dots \circ f_{i_0\alpha(i_0)}(j)$

3.- Sea la permutación $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3. \end{matrix}$ Escribe f como composición de transposiciones consecutivas.

$\{1,2,3,4,5\} = Orb_1 f \cup Orb_2 f \cup Orb_3 f = \{1,4\} \cup \{2\} \cup \{3,5\}$

ASÍ $f = f_{14} \circ f_{3,5}$ DOS TRANSPOSICIONES NO CONSECUTIVAS.

AHORA $f = f_{1,4} \circ f_{3,5} = (f_{2,1} \circ f_{3,2} \circ f_{3,4} \circ f_{23} \circ f_{1,2}) \circ$

$\circ (f_{3,3} \circ f_{4,5} \circ f_{3,4})$.

— . —

4_1.- En S_7 se considera la permutación g

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5. \end{matrix}$$

¿Cuántas inversiones presenta g?

	[3 1 2 4 7 6 5]	1 inversión
Quitando 1	[3 2 4 7 6 5]	1 inversión
Quitando 2	[3 4, 7 6 5]	0 inversiones
" 3	[4, 7 6 5]	0 inversiones
" 4	[7 6 5]	2 inversiones
" 5	[7 6]	1 inversión
	total	5 inversiones

4_2.- Sea la transposición $f_{3,5}$ ¿cuántas inversiones presenta $g \circ f_{3,5}$? Relaciona este resultado con él de 4_1.

$g \circ f_{3,5} = [3, 1, 7\ 4\ 2\ 6\ 5]$

Así

	[3, 1 7 4 2 6 5]	1 inversión
Quitando el 1	[3 7 4 2 6 5]	3 inversiones
Quitando el 2	[3 7 4 6 5]	0 inversiones
Quitando el 3	[7, 4, 6 5]	1 inversión
Quitando el 4	[7, 6 5]	2 inversiones
Quitando el 5	[7, 6]	1 inversión
	total	8 inversiones

g tiene paridad impar (5) y $g \circ f_{3,5}$ tiene inversión par (8). El producto con una transposición ha cambiado la paridad de g.