HOJA VII

EJERCICIO 1º (VER HOJA 0).

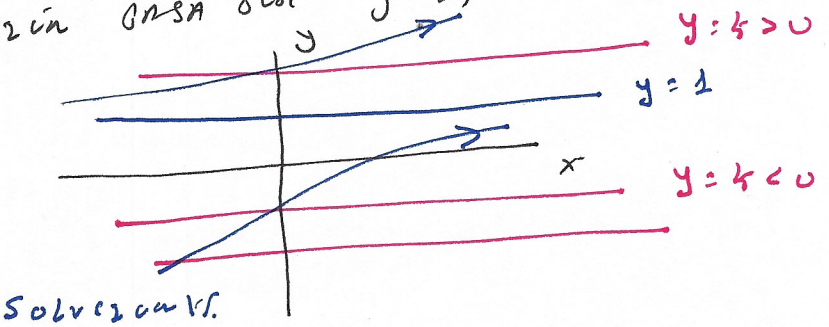
a) $y' = (y-1)^2 \geq 0$ (LAS SOLUCIONES SON FUNCIONES CRECIENTES)

ISOCLINAS $(y-1)^2 = k \geq 0$ ó $y - 1 = k \in \mathbb{R}$

LUEGO LAS ISOCLINAS SON RECTAS PARALELAS AL EJE $y = 0$.

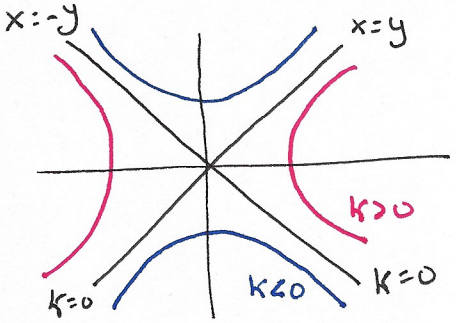
LA ISOCLINA $y' = 0$, $(y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$

EN ESTE CASO ESPECIAL $y = 1$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL PROBLEMA, QUE VARIACIONES DE SOLUCIONES NO CORTA SUS SOLUCIÓN GENERAL QUE $y = 1$, SALVO ELLA MISMA

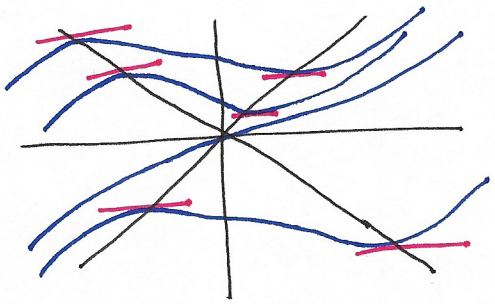


b) $y' = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

ISOCLINAS $x^2 - y^2 = k \in \mathbb{R}$ FAMILIA DE HIPÉRBOLAS.



Y LAS CURVAS SOLUCIÓN

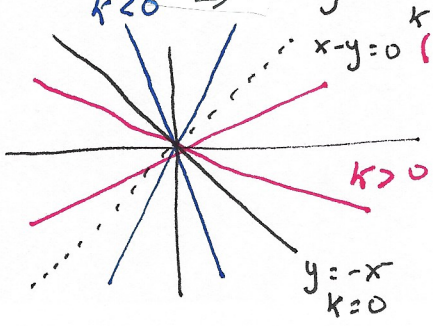


c) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ ISOCLINAS $\dfrac{x+y}{x-y} = k \iff x + y = kx - ky$

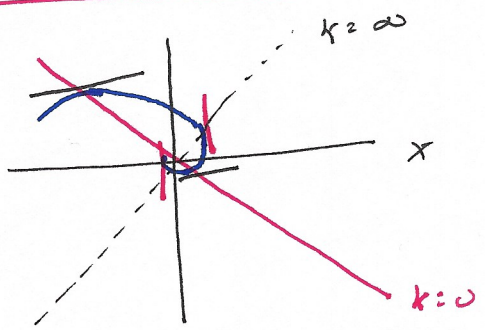
RECTAS QUE PASAN POR EL ORIGEN

$k < 0 \Rightarrow y = \dfrac{k-1}{k+1}x$

$x - y = 0$ ($y' = \infty$)



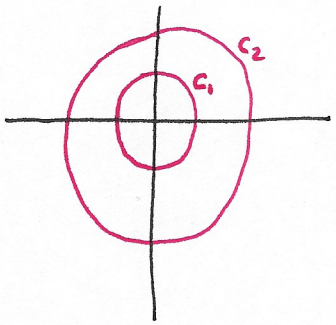
Y LAS CURVAS SOLUCIÓN



HOJA 7°

PROBLEMA 2:

c/ $x^2 + y^2 = c^2$ ES UNA FAMILIA DE CIRCUNFERENCIAS CON CENTRO EN (0,0)



DERIVANDO $2x + 2yy' = 0$

ASÍ $\boxed{y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}}$ E.D.O CUYAS SOLUCIONES SON LA FAMILIA DE CURVAS

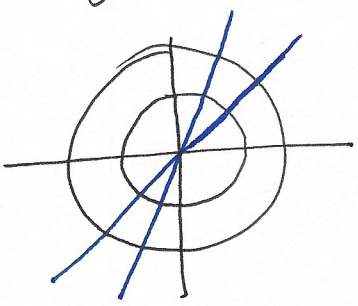
LA FAMILIA DE CURVAS ORTOGONALES ES

$y' = \frac{y}{x}$ E.D.O DE 1ER ORDEN DE VARIABLES SEPARADAS

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$ INTEGRANDO

$\ln|y(x)| = \ln|x| + k$

LUEGO $y(x) = kx$ $k \in \mathbb{R}$ (RECTAS QUE PASAN POR EL ORIGEN)



CADA RECTA CORTA DE FORMA ORTOGONAL A CADA CIRCUNFERENCIA.

HOJA 1ª

PROBLEMA 4: UNA FUNCIÓN $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ SE DICE HOMOGÉNEA SI $f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

POR EJEMPLO: $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ ES HOMOGÉNEA.

$\Rightarrow$ SI f ES HOMOGÉNEA

LA ISOCLINA $k = f(x,y)$, VERIFICA QUE PARA $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$k = f(x_0,y_0) = f(\lambda x_0, \lambda y_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

LUEGO LA RECTA QUE UNE $(0,0)$ CON (x_0,y_0) ES PARTE DE LA ISOCLINA. COMO $\nabla f \neq 0$ EN DOMO PUNTO, EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA NOS DICE (O POR SU UNICIDAD) QUE $k = f(x,y)$ ES LA RECTA ANTERIOR.

$\Leftarrow$ SI LAS ISOCLINAS SON RECTAS.

ENTONCES $k = f(x,y) \iff k - f(x,y) = ax + by = 0$

PARA CIERTOS $a, b \in \mathbb{R}$. LUEGO $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$0 = a\lambda x + b\lambda y = k - f(\lambda x, \lambda y) \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = k.$

LUEGO $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$; ASÍ f ES HOMOGÉNEA

PROBLEMA 5º: $x' = ax \quad a \in \mathbb{R}$

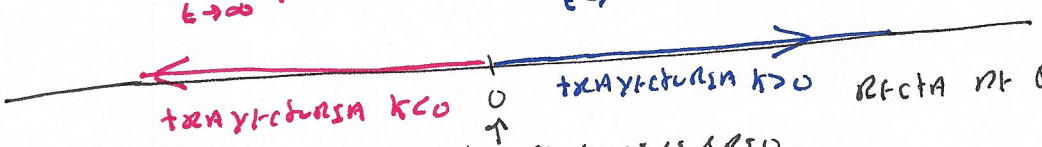
1) $a > 0$ LAS SOLUCIONES SON $x(t) = ke^{at} \quad k \in \mathbb{R}$

[OBSERVACIÓN: SI $k_1, k_2 > 0$, $\exists t_0$ CON $e^{t_0 a} = \frac{k_2}{k_1} > 0$

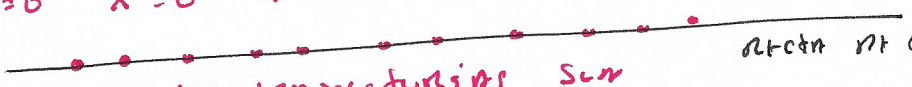
LUEGO $ke^{at} = k_1 e^{a(t+t_0)}$, ANÁLOGO SI $k < 0$]

LAS TRAYECTORIAS SOBRE $\mathbb{R}$ SON

$\lim_{t \to -\infty} ke^{at} = -\infty$ $\quad$ $\lim_{t \to \infty} ke^{at} = \infty$

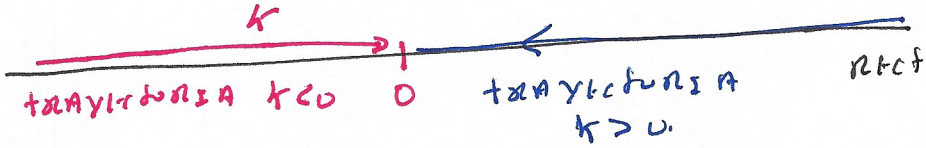


2) SI $a = 0 \quad x' = 0 \Rightarrow x = cte$



TODAS LAS TRAYECTORIAS SON ESTACIONARIAS

3) $a < 0$, ANÁLOGO AL CASO $a > 0$, $x(t) = ke^{at} \begin{cases} \to 0 & t \to \infty \\ \to \text{sgn}(k)\infty & t \to -\infty \end{cases}$



HOJA 7

Problema 7:

b) $\begin{cases} x'(t) = -3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + 3y(t) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Autovalores

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(3-\lambda) + 8 =$$

$$= -(9-\lambda^2) + 8 = 0$$

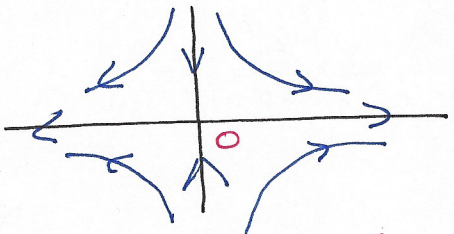
Luego $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$

Como los autovalores son reales y distintos, el sistema es diagonalizable.

Para el problema en variables $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ tenemos

la siguiente matriz fundamental

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



DONDE CERO ES UN PUNTO DE SILLA

Autovector asociado: para $\lambda = 1$

$$-4x - 2y = 0 \Rightarrow y = -2x \qquad v_1 = (1, -2)$$

para $\lambda = -1$

$$-2x - 2y = 0 \Rightarrow y = -x \qquad v_2 = (1, -1)$$

La matriz cuyo $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

y tenemos la siguiente gráfica

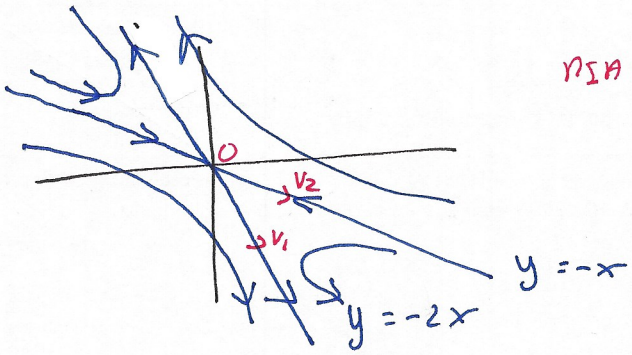


Diagrama de fases.

(0,0) punto de silla

HOJA VII

PROBLEMA 1: f) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

AUTOVALORES Resolvemos la ecuación característica

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda) + 5 =$$

$$= \lambda^2 - 1 + 5 = \lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

Con estos autovalores el punto no trivial es un centro, si $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ es del tipo pedido.

MATRIZ DE PASO Para $\lambda = 2i$ tenemos el sistema $(-1-2i)x + y = 0 \Rightarrow y = (1+2i)x$.

Luego $v = (1, 1+2i) = (1,1) + (0,2)i$ es un autovector y la matriz de paso Q.

es $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

MATRIZ FUNDAMENTAL $e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$

y $e^{At}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t & \sin 2t + 2\cos 2t \end{pmatrix}$

o también las soluciones vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q e^{Jt}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} r_0 \cos(\theta_0 - 2t) \\ r_0 \sin(\theta_0 - 2t) \end{pmatrix} \quad \forall r_0 \in [0,\infty) \text{ y } \forall \theta_0 \in [0, 2\pi)$$

para $r_0 = 1$ y $\theta_0 = 0$ tenemos la solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos -2t \\ \sin -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -2t \\ \cos -2t + 2\sin -2t \end{pmatrix}$$

para $t = 0$ la solución pasa por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

para $t = \varepsilon > 0$ la solución pasa por $(\cos 2\varepsilon, \cos 2\varepsilon - 2\sin 2\varepsilon)$.

Así $\ln \frac{1}{1} \geq \ln \frac{\cos 2\varepsilon - 2\sin 2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon} = \ln 1 - \frac{2\sin 2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}$ Estamos dentro.

DIAGRAMA DE FASES.

HOJA 7:

PROBLEMA 8: $x' = \mu x + y$ $\quad$ μ parámetro
$y' = -9x + 6y$

AUTOVALORES $\quad \det \begin{vmatrix} \mu - \lambda & 1 \\ -9 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (\mu - \lambda)(6 - \lambda) + 9 =$

$= \lambda^2 - (\mu + 6)\lambda + 6\mu + 9$

$\lambda = \dfrac{\mu + 6 \pm \sqrt{(\mu+6)^2 - 4(6\mu + 9)}}{2}$

DISCRIMINANTE: $(\mu+6)^2 - 24\mu - 36 =$

$= \mu^2 + 12\mu + 36 - 24\mu - 36 =$

$= \mu^2 - 12\mu = \mu(\mu - 12)$.

SI $\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ RAÍZ DOBLE. $(0,0)$. NODO IMPROPIO ESTABLE.

SI $\mu = 12 \Rightarrow \lambda = 9$ RAÍZ DOBLE

SI $\mu > 12 \Rightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $(0,0)$ PUNTO DE SILLA

SI $0 < \mu < 12 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ CONJUGADOS $(0,0)$ FOCO ESTABLE
con $\operatorname{Re} \lambda_1 = \frac{\mu+6}{2} > 0$

SI $\mu < 0$ $\quad \lambda_1, \lambda_2$ REALES con

SI $-3/2 < \mu < 0 \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $(0,0)$ PUNTO DE SILLA

SI $\mu = -3/2 \quad \lambda_1 = 0 < \lambda_2 = \mu + 6$ $y = 0$ RECTA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO

SI $\mu < -3/2 \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $(0,0)$ PUNTO DE SILLA

HOJA 7.

Problema 9: DIAGRAMA DE FASE DE

$$x' = x - 2y + 1$$
$$y' = -y + 1$$

EL PUNTO $y = 1 \quad x = 1$ PUNTO DE EQUILIBRIO

SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO

$$x' = x - 2y$$
$$y' = -y$$

AUTOVALORES $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda) = 0 \quad \lambda = 1 \quad \lambda = -1$

AUTOVALOR REAL DE SIGNO ASÍ EL DE DISTINTO

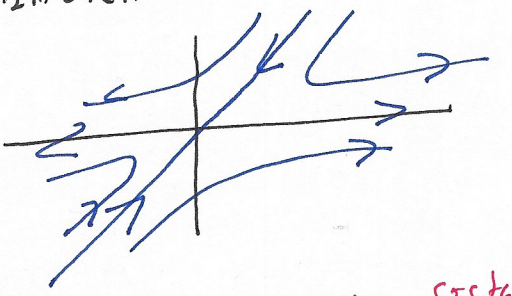
AUTOVALOR REAL DE SILLA

(v, v) ES UN PUNTO DE SILLA

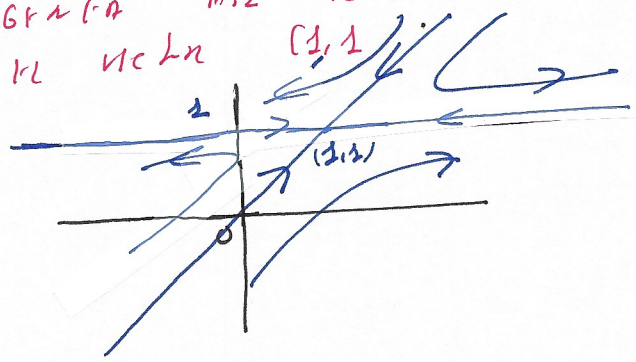
AUTOVECTORES PARA $\lambda = 1 \quad -2y = 0$ LUEGO $(1,0) = V_1$

PARA $\lambda = -1 \quad 2x - 2y = 0$ DE $x = y$ $(1,1) = V_2$

DIAGRAMA DEL SISTEMA HOMOGÉNEO



LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO SON LA SUMA DE LA SOLUCIÓN DE EQUILIBRIO $(1,1)$ (SOLUCIÓN PARTICULAR). CON LAS SOLUCIONES DEL HOMOGÉNEO ASÍ EL DIBUJO DE SON EL DE LA



OBSERVAR QUE LA RECTA DE DIRECCIÓN $V_2 = (1,1)$ QUEDA SOBRE LA TRANSICIÓN

HOJA 7

Problema 10: $x' = Ax + b$ con $|A| \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}^n$

Sea el cambio $x = Py + c$.

Mediante $x' = Py'$

Por otro lado $x' = Ax + b = A(Py + c) + b$

$= APy + Ac + b$

Luego $y' = P^{-1}APy + P^{-1}Ac + P^{-1}b =$

$= P^{-1}APy + P^{-1}(Ac + b) =$

Sea $B = P^{-1}AP$ y probar que esta ecuación con $|A| \neq 0$!

Si $|A| \neq 0$ $\forall b \in \mathbb{R}^n$ $\exists c \in \mathbb{R}^n$ con $Ac = -b$

[La matriz $c = A^{-1}(-b)$.]

$= By$

Problema 9: Interpretar si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Sea $P = I$

Sea $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_2 = 1 \quad c_1 = 1$

Así el cambio $x = y + (1,1)$ LLEGAMOS A

$x' = y'$

$x' = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\left(y + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Ay + A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Ay$

$y = y'A$

Nos sale. El mismo grafo mi fácil del sistema de partida pero girado respecto $x' = Ax$ y el problema original mediante traslación mediante el vector $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.