ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

SISTEMAS DE E.D.O. INTRODUCCIÓN.

Vamos a comenzar con un **ejemplo**. Consideramos una trayectoria s en el espacio $\mathbb{R}^3$, es decir

$$\begin{array}{rccccc} s & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 & \\ & & t & \to & s(t) & = & (s_1(t), s_2(t), s_3(t)) \end{array}$$

Vista la trayectoria como el movimiento de un móvil, éste se produce por la acción de una fuera F, o la resultante (suma) de varias. La segunda Ley de Newton nos dice que la masa m del móvil por su aceleración s'' debe ser igual a la resultante de las fuerzas del sistema F, es decir:

$$F = ms''.$$

Vamos a desarrollar esta fórmula y llegaremos a un ejemplo de un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias**.

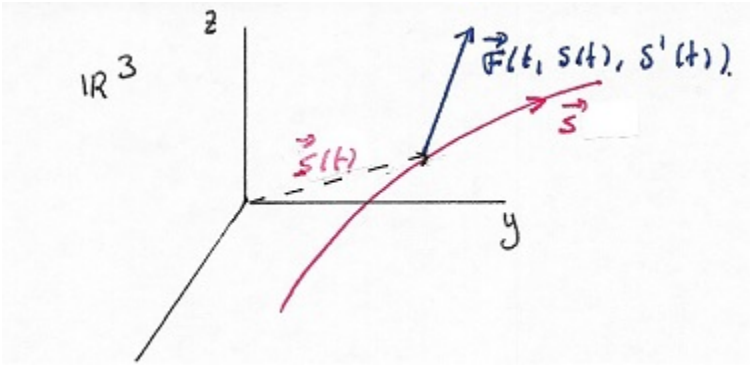

FIGURA 1. Móvil actuando por una fuerza.

La fuerza F es un vector de tres componentes $F = (F_1, F_2, F_3)$ cuyas variables pueden ser:

- t el tiempo, si la fuerza varía con él.
- (x, y, z) la posición en el espacio, pensemos en la gravedad que es inversamente proporcional a la distancia.
- (s_1', s_2', s_3') la velocidad del móvil, pensemos en las fuerzas de rozamiento que aparecen cuando hay movimiento.

Como la fuerza se ejerce sobre el móvil, esta fuerza depende del tiempo, la posición del móvil $s(t)$ y de su velocidad $s'(t)$. Así la fórmula de arriba queda:

$$ms''(t) = F(t, s(t), s'(t)) = (\, F_1(t, s(t), s'(t)), F_2(t, s(t), s'(t)), F_3(t, s(t), s'(t))\,)$$

y desarrollada en componentes

$$\begin{array}{rcl} ms_1''(t) & = & F_1(\, t, s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_1'(t), s_2'(t), s_3'(t)\,) \\ ms_2''(t) & = & F_2(\, t, s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_1'(t), s_2'(t), s_3'(t)\,) \\ ms_1''(t) & = & F_3(\, t, s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_1'(t), s_2'(t), s_3'(t)\,). \end{array}$$

Tenemos tres ecuaciones diferenciales de segundo orden y con tres incógnitas: s_1, s_2 y s_3. Si llamamos a

- $s_1' = u_4$,
- $s_2' = u_5$,
- $s_3' = u_6$;

las ecuaciones de arriba se pueden escribir como:

$$\begin{array}{rcl} s_1'(t) & = & u_4(t) \\ s_2'(t) & = & u_5(t) \\ s_3'(t) & = & u_6(t) \\ u_4'(t) & = & \frac{1}{m} F_1(\, t, s_1(t), s_2(t), s_3(t), u_4(t), u_5(t), u_6(t)\,) \\ u_5'(t) & = & \frac{1}{m} F_2(\, t, s_1(t), s_2(t), s_3(t), u_4(t), u_5(t), u_6(t)\,) \\ u_6'(t) & = & \frac{1}{m} F_3(\, t, s_1(t), s_2(t), s_3(t), u_4(t), u_5(t), u_6(t)\,). \end{array}$$

Esto es un ejemplo de un sistema de 6 E.D.O. de primer orden con seis incógnitas: s_1, s_2, s_3, u_4, u_5 y u_6.

En general:

Definición 1. *Sea una función:*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [a,b] \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (t, x_1, ..., x_n) & \to & f(\, t, x_1, ..., x_n\,) \;=\; (\, f_1(\, t, x_1, ..., x_n\,), ..., f_n(\, t, x_1, ..., x_n\,)\,). \end{array}$$

Se llama ***sistema de E.D.O. de primer orden*** *al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & f_1(\, t, x_1(t), ..., x_n(t)\,) \\ x_2'(t) & = & f_2(\, t, x_1(t), ..., x_n(t)\,) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & f_n(\, t, x_1(t), ..., x_n(t)\,), \end{array} \qquad (*)$$

con incógnitas las n funciones $x_1(t), ..., x_n(t)$.

Definición 2. *Una solución del sistema* $(*)$ *es toda trayectoria* x *de* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\begin{array}{rcccl} x & : & J \subset [a,b] & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \to & x(t) \;=\; (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), \end{array}$$

definida sobre un dominio J *incluido en el intervalo* $[a,b]$*, que verifica el sistema* $(*)$.

Observación 1.

- Si queda claro el dominio y la imagen de f y x, entonces el sistema $(*)$ se puede escribir de forma abreviada

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

  Como la E.D.O. de primer orden. De hecho, está es un caso particular de los sistemas cuando $n = 1$.
- Al dar una solución x, es importante determinar su dominio J, el cuál tiene que estar incluido dentro de $[a, b]$, pués solo sobre este intervalo tenemos información sobre la función f; la función que define el sistema.
- Se pueden definir **sistemas de E.D.O. de orden superior**, donde aparecen derivadas de x de orden mayor o igual a 2, como en el ejemplo inicial. Ahora, con un "truco"(cambio de variables) similar al que hicimos en este primer ejemplo, se puede transformar estos sistemas en otros de primer orden (¡claro, con más ecuaciones!). Recordemos que la E.D.O. lineal de orden n se podía transformar en un sitemas de n ecuaciones de primer orden.

Definición 3. *Sea una función:*

$$\begin{array}{rccccc} f & : & [a,b]\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n & \\ & & (t,x_1,...,x_n) & \to & f(\,t,x_1,...,x_n\,) & = & (\,f_1(\,t,x_1,...,x_n\,),...,f_n(\,t,x_1,...,x_n\,)\,). \end{array}$$

Se llama ***problema de Cauchy o de valor inicial****, al problema:*

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & f_1(\,t,x_1(t),...,x_n(t)\,) \\ x_2'(t) & = & f_2(\,t,x_1(t),...,x_n(t)\,) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & f_n(\,t,x_1(t),...,x_n(t)\,), \end{array} \qquad (**)$$

$$x_1(t_0) = a_1,\ x_2(t_0) = a_2,\ .....,x_n(t_0) = a_n,$$

para algún $t_0 \in [a, b]$ *fijo, algún* $a_0 = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}$ *fijo y* $(t_0, a_1, ..., a_n) \in Domf$.

Toda **solución del problema de Cauchy** x es una solución del sistema $(*)$ que además verifica las condiciones iniciales de $(**)$, es decir verifica además que $x(t_0) = a_0$ o bien

$$x_1(t_0) = a_1,\ x_2(t_0) = a_2,\ .....,x_n(t_0) = a_n.$$

Observación 2.

- *Como en el caso de las E.D.O. de primer orden, el sistema* $(*)$ *tendrá infinitas soluciones. Mientras que el problema de Cauchy suele tener una única solución.*

- *Pero, **¿cuándo un sistema de E.D.O. va a tener solución?** Puede haber sistemas $(*)$ sin solución. O problemas de Cauchy $(**)$ sin solución única. Esto va a depender de las **propiedades de la función** f.*
- *La respuesta a la pregunta anterior es el **Teorema de Existencia y Unicidad**, que vamos a enunciar, pero no probar. Queda fuera del alcance de este curso, aunque la unicidad de soluciones la vamos a tener que utilizar en algunas ocasiones.*

Teorema 1. *(**de Existencia**) Sea una función:*

$$\begin{array}{rccc} f & : & [a,b]\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (t,x_1,...,x_n) & \to & f(\,t,x_1,...,x_n\,) \;=\; (\,f_1(\,t,x_1,...,x_n\,),...,f_n(\,t,x_1,...,x_n\,)\,) \end{array},$$

***continua** en un entorno V del punto $(t_0,a_0)\in Domf$, para algún $t_0\in[a,b]$ y $a_0\in\mathbb{R}^n$. Entonces **existe** una trayectoria x definida al menos en un entorno J del punto t_0,*

$$t_0\in J\subset[a,b]$$

de modo que x es solución del problema de Cauchy $(**)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = & a_0 \end{array}\right. .$$

Teorema 2. *(**de Existencia y Unicidad**) Sea una función:*

$$\begin{array}{rccc} f & : & [a,b]\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (t,x_1,...,x_n) & \to & f(\,t,x_1,...,x_n\,) \;=\; (\,f_1(\,t,x_1,...,x_n\,),...,f_n(\,t,x_1,...,x_n\,)\,) \end{array},$$

***continua** en un entorno V del punto $(t_0,a_0)\in Domf$, para algún $t_0\in[a,b]$ y $a_0\in\mathbb{R}^n$. Y además, **Lipschitziana** en "x", es decir, existe $K>0$ para la cual*

$$|f(t,y)-f(t,z)|\leq K|y-z|,$$

para todo $(t,y),(t,z)\in V$.

*Entonces **existe** una trayectoria x definida al menos en un entorno J del punto t_0,*

$$t_0\in J\subset[a,b]$$

de modo que x es solución del problema de Cauchy $(**)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = & a_0 \end{array}\right.$$

*y además es **única**.*

Observación 3. *Las hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad las cumple una función $f\in C^1(Domf)$, es decir una función con dominio abierto y que tiene derivadas parciales continuas.*

Ejemplo 1. *Consideramos el problema de Cauchy:*

$$\left\{\begin{array}{lllll} x'(t) & = & (1/t)x(t) & & +t^2 \\ y'(t) & = & (-1/t)x(t) & +(1/t)y(t) & \\ x(1) & = 0 & y(1) & = & 0. \end{array}\right.$$

Observemos que tenemos dos funciones

$$\begin{array}{rcl} f_1(t,x,y) & = & (1/t)x + t^2 \\ f_2(t,x,y) & = & (-1/t)x + (1/t)y \end{array}$$

componentes de la función

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(t,x,y) = (\ f_1(t,x,y), f_2(t,x,y)\ ).$$

No podemos esperar soluciones (x, y) del problema para $t = 0$, ya que la función f no esta definida en él. El punto $(1, 0, 0) \in Dom f$ ($t_0 = 1$ y $a_0 = (0, 0)$) y como f_1 y f_2 tienen derivadas parciales continuas, el Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que va a existir una solución única al menos en un intervalo centrado en $t_0 = 1$.

¿Como encontramos la solución de forma explícita? En general, no existe un método para resolver este problema. En este caso particular si se puede.

Observemos que la primera ecuación

$$\left\{\begin{array}{lllll} x'(t) & = & (1/t)x(t) & & +t^2 \\ x(1) & = 0. & & & \end{array}\right.$$

es una **E.D.O. lineal no homogénea**, que sabemos resolver.

- **Solución homogénea**: $x' = (1/t)x$, así $x(t) = Kt$ donde $K \in \mathbb{R}$.
- **Variación de las constantes**: encontramos una solución particular $x_0(t) = t^3/2$.
- **Solución general**: $x(t) = Kt + t^3/2$ donde $K \in \mathbb{R}$.
- **Problema de valor inicial**: si $x(1) = 0$, entonces $K = -1/2$. Así

  $$x(t) = -t/2 + t^3/2.$$

  Como ya conocemos la x, sustituimos la x en al segunda ecuación por su valor y tenemos

  $$\left\{\begin{array}{lllll} y'(t) & = & (-1/t)[-t/2 + t^3/2] & +(1/t)y(t) & \\ y(1) & = 0. & & & \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

  $$\left\{\begin{array}{lllll} y'(t) & = & 1/2 - t^2/2 & +(1/t)y(t) & \\ y(1) & = 0. & & & \end{array}\right. ,$$

  que es de nuevo una E.D.O. lineal no homogénea. La resolvemos de forma análoga a la primera y sale:

  $$y(t) = t/4 - t^3/4 + (t \ln t)/2.$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es