ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE E.D.O. LINEALES.

Consideramos un sistema lineal:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad\qquad (*)$$

Las soluciones de este sistema son trayectorias que al menos tienen que ser continuas, de hecho son derivables. Notamos por

$$C([a,b],\mathbb{R}^n) = \{x : [a,b] \to \mathbb{R}^n : x \text{ continua } \}$$

al conjunto de las trayectorias continuas en $\mathbb{R}^n$ con dominio en $[a,b]$. Este conjunto tiene estructura de espacio vectorial, con la suma de funciones y el producto por escalares habituales. Llamaremos

$$S = \{x \in C([a,b],\mathbb{R}^n) : x \text{ solución de } x'(t) = A(t)x(t)\}$$

y

$$S' = \{x \in C([a,b],\mathbb{R}^n) : x \text{ solución de } x'(t) = A(t)x(t) + b(t)\}.$$

Se tiene el siguiente resultado análogo al que teniamos para la E.D.O. lineal de primer orden.

Teorema 1. *Sean $a_{i,j}$, $b_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ funciones continuas para $i,j = 1,2,...,n$. Sea el sistema:*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad\qquad (*)$$

Entonces

- *S es un subespacio vectorial de $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ de dimensión n.*
- *Si $y_0 \in S'$, (y_0 es una solución particular de $(*)$), entonces*

$$S' = \{y_0 + x \in C([a,b],\mathbb{R}^n) \ : \ x \in S\},$$

S' es un subespacio afín de dimensión n sobre S.

Demostración: **Ejercicio.** Se procede igual que en el caso de la E.D.O. lineal de primer orden. Para probar que $dim S = n$ se necesita el Teorema de Unicidad (ver lección anterior) y para ello se necesita la hipótesis de la continuidad.

Para ver que S' es un espacio afín, se toma $y_1 \in S'$ y se comprueba que $y_1 - y_0 \in S$ $\square$.

El Teorema anterior nos dice que para hallar las soluciones del sistema $(*)$

- primero tenemos que resolver el problema homogéneo asociado $x' = A(t)x$;
- y después encontrar una **solución particular** de $x' = A(t)x + b(t)$.

Sistemas homogéneos.

Definición 1. *Sea el sistema homogéneo $x' = A(t)x$ con $A(t)$ continua de orden n. A una matriz ϕ de columnas*

$$\phi(t) = (\, \phi_1(t)\ \phi_2(t)\ ......\ \phi_n(t)\,),$$

*donde cada $\phi_j \in S$ es una solución del sistema homogéneo, para $j = 1, 2, .., n$. Que además, todas estas **soluciones** son **linealmente independientes**, a una matriz así ϕ se le llama **matriz fundamental** del sistema homogéneo.*

Observemos que las columnas de una matriz fundamental forman una base del espacio S de soluciones de un sistema homogéneo.

Ejemplo 1. *Se considera el sistema*

$$\begin{cases} x' &= & & -y \\ y' &= & -x & \end{cases}$$

y las soluciones $s_1(t) = (e^{-t}, e^{-t})$ y $s_2(t) = (e^t, -e^t)$.

Se comprueba que s_1 y s_2 son soluciones (ver Ejemplo de la lección anterior). Además son independientes ya que si

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 = 0,$$

entonces para $t = 0$ se tiene que

$$\lambda_1(1, 1) + \lambda_2(1, -1) = 0$$

y así $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De lo que se concluye que

$$\phi(t) = (\, s_1(t)\ s_2(t)\,) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix}$$

es una **matriz fundamental** del sistema.

Vamos a ver a continuación otras propiedades de las matrices fundamentales.

Proposición 1. *Sea el sistema homogéneo $x' = A(t)x$ con $A(t)$ continua de orden n. Sea $\phi(t)$ una **matriz fundamental** del mismo.*

- **a):** *Para todo* $c \in \mathbb{R}^n$, *se tiene que* $x(t) = \phi(t)c$ *es una solución del sistema* $x' = A(t)x$.
- **b):** *Una matriz de soluciones del sistema* $\phi(t)$ *es fundamental si y solo si existe* $t_0 \in [a, b]$ *tal que* $|\phi(t_0)| \neq 0$; *o lo que lo mismo, para todo* $t \in [a, b]$ *se tiene que* $|\phi(t)| \neq 0$
- **c):** *Si* x *es una solución del sistema con* $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, *entonces*

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Demostración: **Ejercicio:** a) y c). (para ello usar b) y el Teorema de Unicidad de soluciones).

b) Supongamos que para algún $t_0 \in [a, b]$ el determinante $|\phi(t_0)| = 0$, entonces el Álgebra Lineal nos dice que las columnas de la matriz $\phi(t_0) = (\ \phi_j(t_0)\ )$ son dependientes. Luego existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tal que

$$\lambda_1\phi_1(t_0) + \lambda_2\phi_2(t_0) + ... + \lambda_n\phi_n(t_0) = 0.$$

Sea la solución del sistema

$$y(t) = \lambda_1\phi_1(t) + \lambda_2\phi_2(t) + ... + \lambda_n\phi_n(t) \in S,$$

cada ϕ_j es una solución del sistema e y es una combinación lineal suya. Como $y(t_0) = 0$, luego por la unicidad de soluciones $y = 0$. Esto prueba que la soluciones ϕ_i **no** son linealmente independientes y que la matriz ϕ **no** es fundamental.

Por otro lado, si la matriz ϕ es fundamental, sus columnas son independientes, y por tanto $|\phi(t)| \neq 0$ para todo t $\square$

Lema 1. *Sean* $A(t)$ *y* $B(t)$ *matrices de funciones derivables, ambas cuadradas de orden* n. *Sea* x *una trayectoria in* $\mathbb{R}^n$ *derivable. Entonces:*

- $\dfrac{dA(t)x(t)}{dt} = \dfrac{dA(t)}{dt}x(t) + A(t)\dfrac{dx(t)}{dt} = A'(t)x + A(t)x'.$
- $\dfrac{dA(t)B(t)}{dt} = \dfrac{dA(t)}{dt}B(t) + A(t)\dfrac{dB(t)}{dt} = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$

Entendemos por derivada de un vector o matriz a la derivada componente a componente.

Demostración: **Ejercicio.** Solo hay que usar la definición de multiplicación de matrices y derivar componente a componente $\square$

Teniendo en cuenta que podemos derivar una matriz, observemos que:

Observación 1. *Una matriz fundamental* $\phi = (\phi_j)$ *verifica que*

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t).$$

Claro, las columnas de $\phi(\phi_j)$ son soluciones del sistema homogéneo $x' = A(t)x$, luego $\phi_j'(t) = A(t)\phi_j(t)$. Por otro lado teniendo en cuanta como se define el producto de matrices, tenemos que

$$\phi'(t) = (\phi_j'(t)) = (A(t)\phi_j(t)) = A(t)(\phi_j(t)) = A(t)\phi(t) \qquad \square$$

Lema 2. *Si $\phi(t) = (\,\phi_{i,j}(t)\,)_{i,j=1,2,\ldots n}$ es una matriz de funciones $\phi_{i,j}$ derivables, entonces la derivada del determiante tiene la forma:*

$$|\phi(t)|' = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \phi_{1,1}(t) & \cdots & \phi_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{i,1}'(t) & \cdots & \phi_{i,n}'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n,1}(t) & \cdots & \phi_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

Demostración: **Ejercicio.** Se hace por inducción sobre n, el orden de la matriz $\square$

Los Lemas anteriores permiten probar el siguiente resultado. No lo vamos a usar más adelante, pero permite resolver sistemas 2×2 conocida una solución particular

Teorema 2. *(**Fórmula de Liouville**). Sea un sistema lineal homogéneo:*

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

donde $A(t)$ es una matriz de orden n de funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$. Si $\phi(t)$ es una matriz de orden n de (columnas) solucciones del sistema, entonces para todo $t_0, t \in [a, b]$ se verifica que

$$|\phi(t)| = |\phi(t_0)| e^{\int_{t_0}^{t} trazaA(s)ds},$$

*donde la **traza** de una matriz se define por $trazaA(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(t)$.*
Demostración:

Ejercicio difícil. Se sabe que $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$, y se utiliza para determinar $\phi_{i,j}'(t)$. Con ello, usando el Lema anterior, se determina $|\phi(t)|'$. Se llega a una E.D.O. lineal homogénea cuya incógnita es la función real de una variable $|\phi(t)|$. Hay que resolver esta E.D.O. $\square$

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor o igual a dos con coeficientes **no** constantes. O los sistemas de E.D.O. lineales de orden mayor o igual a dos y de coeficientes **no** constante son ejemplos sencillos de problemas diferenciales de los que no conocemos una forma explícita de resolución. Por ejemplo:

Ejemplo 2. *La E.D.O. lineal homogénea de segundo orden:*

$$x''(t) - \frac{2t}{1+t^2}x'(t) + \frac{2}{1+t^2}x(t) = 0 \qquad (1)$$

Es equivalente al sistema lineal homogéneo de orden 2×2

$$\begin{array}{lllll} x_1(t) & = & x(t) & & \\ x_2(t) & = & x'(t) & = & x_1'(t) \Leftrightarrow \begin{array}{lllll} x_1'(t) & = & & & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -\frac{2}{1+t^2}x_1(t) & + & \frac{2t}{1+t^2}x_2(t) \end{array}, \end{array}$$

o bien de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Vamos a resolver este problema por dos caminos. Ambos usan que es fácil conocer una solución particular del problema y esto permite **reducir el orden** del problema.

Método (1): La ecuación de segundo orden (1) admite como solución $x(t) = t$ (compruebaló). Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & tz(t) \\ x'(t) & = & z(t) + tz'(t) \\ x''(t) & = & 2z'(t) + tz''(t). \end{array}$$

Entrando en la E.D.O.

$$2z'(t) + tz''(t) - \frac{2t}{1+t^2}[z(t) + tz'(t)] + \frac{2}{1+t^2}tz(t) = 0,$$

equivanente a

$$\frac{2}{1+t^2}z'(t) + tz''(t) = 0 \qquad \Leftrightarrow z''(t) = -\frac{2}{t(1+t^2)}z'(t),$$

que es una E.D.O. lineal de primer orden. Intenta resolverla.

Método (2): Es claro que $(t, 1)$ es una solución del sistema (2). Luego una matriz fundamental del sistema es

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t & \varphi(t) \\ 1 & \varphi'(t) \end{pmatrix}.$$

Podemos suponer que $\varphi(1) = 0$ y que $\varphi'(1) = 1$, de este modo las dos columnas de ϕ son independientes. Usando la **Fórmula de Liouville** para $t_0 = 1$, tenemos que

$$|\phi(t)| = \begin{vmatrix} t & \varphi(t) \\ 1 & \varphi'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e^{\int_1^t \frac{2s}{(1+s^2)}ds} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \frac{1+t^2}{2},$$

luego llegamos a la E.D.O.

$$t\varphi'(t) - \varphi(t) = \frac{1+t^2}{2} \qquad \Leftrightarrow \varphi'(t) = \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{1+t^2}{2}.$$

Ahora integramos esta E.D.O. lineal no homogénea y llegamos a que:

$$\varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Por tanto una matriz fundamental de (2) es

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2-1}{2} \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Observemos también que $y(t) = \frac{t^2-1}{2}$ es una segunda solución del la ecuación (1) linealmente independiente de la solución que ya conociamos $x(t) = t$ $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es