EDO-V.

1.- Dibuja las líneas isoclinas de las siguientes ecuaciones diferenciales y haz un esbozo de las curvas integrales de las ecuaciones.

a) $y' = (y-1)^2$ b) $y' = x^2 - y^2$ c) $y' = \cos(x-y)$
d) $y' = x + y$ e) $y' = (x+y)(x-y)^{-1}$.

2.- Calcula la familia de curvas ortogonales de las familias de curvas:

a) $y = Kx^2$ b) $y = Kx^n$ c) $x^2 + y^2 = c^2$ d) $\dfrac{x^2}{a^2+r} + \dfrac{y^2}{b^2+r} = 1$ donde $r \in \mathbb{R}$.

Las familias de curvas ortogonales tienen interesantes aplicaciones. Así si fluye una corriente eléctrica en una lámina plana de material conductor, las líneas de igual potencial serán las trayectorias ortogonales a las líneas de flujo de la corriente.

Lineas de máxima pendiente. Sea la superficie $z = f(x,y)$ referida al plano x, y-horizontal. Las líneas de máxima pendiente a esta superficie son perpendiculares a las horizontales de la superficie; y se proyectan sobre el plano xy según las trayectorias ortogonales al haz $f(x,y) = K$, proyección de dichas curvas de nivel.

3.- Aplica lo anterior para hallar las curvas que describen las gotas de agua al resbalar, despreciando la inercia, es decir con velocidad inicial nula y sin rozamiento, sobre tejas cilíndricas inclinadas 30 grados.

4.- Sea $y' = f(x,y)$ una E.D.O. de modo que el gradiente de f no se anula , $\nabla f \neq 0$, en todo punto (x,y). Demuestra que las isoclinas de la ecuación diferencial son rectas que pasan por el origen de coordenadas si y solo si f es una función homogénea.

5.- Estudia los diagramas de fases de la ecuación lineal $x' = ax$ para $a \in \mathbb{R}$.

6.- Prueba que si $x(t)$ es solución de $x' = Ax$, también lo es $z(t) = x(t+\tau)$, con $\tau \in \mathbb{R}$ fijo. ¿ Por qué lo anterior no es cierto para los sistemas $x' = A(t)x$?

7.-Esboza los diagramas de fases de los sistemas $x' = Ax$ para las matrices A siguientes:

a) $\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -13 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$ h) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

8.- Estudia como varía el diagrama de fases del sistema:

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & \mu x & + & y \\ y' & = & -9x & + & 6y \end{array}$$

al variar el parámetro $\mu \in \mathbb{R}$.

9.- Halla la solución general y dibuja el diagrama de fases del sistema:

$$\begin{array}{rcrcrr} x' & = & x & - & 2y & +1 \\ y' & = & & - & y & +1 \end{array}$$

10.- Sea la ecuación $x' = Ax + b$, donde $|A| \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Prueba que existe un cambio de variable $x = Py + c$ de modo que la ecuación diferencial se transforma en otra del tipo $y' = By$. Calcula P, c y B.

Resuelve de nuevo el problema anterior.

11.- ANÁLISIS CUALITATIVO (No resolver la ecuación diferencial)

Sea la ecuación $x'' + x = 0$. Sean $s(t)$ y $c(t)$ las únicas soluciones tal que $s(0) = 0$ y $s'(0) = 1$ y además $c(0) = 1$ y $c'(0) = 0$. Prueba a partir de la ecuación las siguientes afirmaciones:

a) Las funciones s y c, como cualquier otra solución de la ecuación, están definidas y son infinitamente derivables en $(-\infty, \infty)$.

b) $s' = c$ y $c' = -s$ c) $s^2(t) + c^2(t) = 1$ d) $W(s, c) = -1$

e) $s(-t) = -s(t)$ y $s(t + a) = s(t)c(a) + s(a)c(t)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

f) $c(-t) = c(t)$ y $c(t + a) = c(t)c(a) - s(a)s(t)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

g) Existe $\min\{t \geq 0 : c(t) = 0\} = \alpha$ tal que $\alpha > 0$. (Llamemos $\alpha = \pi/2$).

h) $s(t + 2\pi) = s(t)$ y $c(t + 2\pi) = c(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(Naturalmente $s(t) = \operatorname{sen} t$ y $c(t) = \cos t$. **Indicación:** usa el Teorema de Existencia y sobre todo el Teorema de unicidad de soluciones).