

EDO-VI.

TRANSFORMADA DE LAPLACE.

1.- a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ positiva. Supongamos que

$$Lf(s_0) := \int_0^\infty f(t)e^{-s_0 t} dt$$

existe para algún $s_0 > 0$ y además $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0 t} f(t) = 0$. Prueba que para todo $s > s_0$ existe

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

A la función Lf se le llama *Transformada de Laplace* de la función f . Comprueba que el dominio de Lf es al menos $[s_0, \infty)$.

b) Comprueba la siguiente tabla de transformadas:

- 1) $f(x) = 1$ tiene $Lf(s) = \frac{1}{s}$ 2) $f(x) = x$ tiene $Lf(s) = \frac{1}{s^2}$
3) $f(x) = e^{-\alpha x}$ tiene $Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ 4) $f(x) = \sin \beta x$ tiene $Lf(s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
5) $f(x) = \cos \beta x$ tiene $Lf(s) = \frac{s}{s^2+\beta^2}$. 6) Calcula $Lf(s)$, donde $f(x) = e^{3x} \sin x$.

2.- Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

- a) Para f y g funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$.
b) Si f es dos veces derivable, entonces $Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$ y $Lf''(s) = s^2Lf(s) - sf(0) - f'(0)$.
c) Prueba que $Lf(at)(s) = \frac{1}{a}Lf(\frac{s}{a})$, para $a > 0$.

3.- Calcula la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin x, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases}, \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

4.- Se consideran las funciones:

- 1) $Lf(s) = \frac{1}{s+3}$ 2) $Lf(s) = \frac{4}{s^2+3s+1}$ 3) $Lf(s) = \frac{s}{s^2-4s+3}$
4) $Lf(s) = \frac{s-7}{25+(s-7)^2}$ 5) $Lf(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$.

En cada caso halla f , la transformada inversa de Laplace.

5.- Sea $s^2 + \alpha s + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, un polinomio de segundo grado. Prueba que siempre existe f función tal que

$$Lf(s) = \frac{1}{(s^2 + \alpha s + \beta)^2}.$$

6.- Prueba que **no** existe una función f de modo que $Lf(s) = 1$ o bien que $Lf(s) = s$.

7.- Sean $H(s) = \frac{1}{s+3}$, $H(s) = \frac{4}{s^2+3s+1}$ y $H(s) = \frac{s}{s^2-4s+3}$ tres funciones de transferencia de otros tantos sistemas lineales causales (circuitos eléctricos RLC). Encuentra las ecuaciones diferenciales que rigen estos circuitos.

8.- Resuelve los siguientes problemas de valor inicial usando la Transformada de Laplace:

- a) $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$ b) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
c) $\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{-2x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$
e) $\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} + 3 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

9.- a) Resuelve el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned}x'(t) &= & -y(t) + t \\y'(t) &= -4x(t)\end{aligned}$$

b) Resuelve los siguiente problemas de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x - 2y - t \\ y'(t) = 2x - 3y - t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x - 2y + 2 \\ y'(t) = 5x - y + 1 \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x + 2y \\ y'(t) = y + z + 3 \\ z'(t) = x - 2 \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 3 \end{array} \right.$$

10.- Usando la transformada de Laplace, encuentra soluciones particulares de los problemas del ejercicio **16** de la Hoja **3**.

11.- Resuelve el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + xu' + u = 0 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{array} \right.$$

usando la transformada de Laplace.

E.D.O. LINEALES CON COEFICIENTES ANALÍTICOS.

12.- La ecuación de Legendre se escribe:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0, \quad \text{con } p \in \mathbb{R}$$

a) Calcula una expresión de la solución general.

b) Prueba que si p es un entero no negativo, entonces la ecuación admite polinomios por solución (polinomio de Legendre).

13.- Las soluciones de la ecuación de Airy $y'' + xy = 0$ se denominan funciones de Airy. Encuentra las funciones de Airy en forma de serie de potencias convergentes a todo x .

14.- La ecuación de Chebyshev es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0 \quad \text{con } p \in \mathbb{R}.$$

a) Halla dos soluciones linealmente independientes definidas en $|x| < 1$.

b) Para p entero positivo, prueba que las soluciones son polinomios de grado p (polinomios de Chebyshev).