EDO-VII.

1.-Ecuaciones HOMOGÉNEAS Integra:
a) $x'(t) = \dfrac{t+x}{t-x}$ b) $(x^2-2y^2)dx + xydy = 0$ c) $x^2y' = 3(x^2+y^2)\arctan(y/x) + xy$
d) $xy' = y + 2xe{-}y/x$ e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$ f) $(x-y+3)dx = (3x+y+1)dy$.
g) Resuelve el problema **8** de la hoja primera.

2.- Resuelve las ecuaciones de **Bernoulli** propuestas a continuación:
a) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2)$ b) $t\dfrac{x'(t)}{x^3(t)} + \dfrac{1}{x^2(t)} = 1$ c) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{(x+1)^3y^2}{2}$
d) Resuelve el problema **15** de la hoja primera.

3.- Resuelve las siguientes E.D.O. mediante el cambio de variable propuesto:
a) $(x^2y^2+1)dx + 2x^2dy = 0$ con el cambio $xy = t$.
b) $(xy + 2xy\ln^2 y + y\ln y)dx + (2x^2\ln y + x)dy = 0$, con el cambio $x\ln y = t$.

4.- Resuelve las ecuaciones de **Riccati** que se planteana continuación.
a) $y' = 2x^2 - (x-1)^2 - x^2y + y^2$ donde $y_1 = x^2 - 1$ es una solución.
b) $y' = 1 - 6y + 9y^2$, usando el cambio de variable $z = \frac{1}{y-y_1}$.

5.- Encuentra la solución general para la ecuación de Riccati, $x'(t) = a(t)x(t)+b(t)x^2(t)+c(t)$, de la cual se conocen dos soluciones particulares x_1 e x_2.

6.- Ecuaciones EXACTAS. Integra:
a) $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$ b) $(x^3-3xy^2+2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$
c) $(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - x/y)dy = 0$ con $y(0) = 2$.

7.- Resuelve las siguientes ecuaciones usando los factores integrantes que se proponen:
a) $(3y^2 - x)dx + 2y(y^2 - 3x)dy = 0$ usando $\mu = \mu(x+y^2)$
b) $xdx + ydy + xdy - ydx = 0$ usando $\mu = \mu(x^2+y^2)$
c) Resuelve el problema **4** de la hoja primera usando $\mu(x,y) = x - \sqrt{x^2+y^2}$.

8.- ECUACIÓN DE ABEL: $y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3$. Si $f_3 \neq 0$ y f_1 y f_2 son funciones derivables, el cambio

$$y(x) = u(z)v(x) + F(x) \quad \text{donde} \quad F(x) = -\frac{f_2}{3f_3}$$

y

$$v(x) = e^{\int (f_1+f_2F)dx} \qquad \text{y} \qquad z(x) = \int f_3v^2(x)dx$$

reduce la ecuación a una del tipo $u'(z) = U(x) + u^3(z)$ siendo U una función de x.
a) Comprueba lo anterior y da una expresión de la función U.
b) Resuelve $y' = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}x^3y + x^2y^2 + xy^3$.

9.- Integra la ecuaciones propuestas:
a) $2x + \frac{y}{y^2+x^2} + (2y + \frac{x}{x^2+y^2})y' = 0$ b) $(x+y)^2y' = a$ c) $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$
d) $(1+x^2)dy - (xy + x^2y^2)dx = 0$ e) $y^4 - y'^4 - yy'^2 = 0$ f) $y = (y'-1)e^{y'}$
g) $(x^2y^2+1)dx + 2x^2dy = 0$ h) $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$ i) $y = 2xy' + \operatorname{sen} y'$
j) $xy' = y + x^2\operatorname{sen} x$ k) $(1 - x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$ l) $y' = \frac{-3y}{x\sqrt{y} - 2y^2\ln y}$
m) $x = \frac{2y}{y'} + \frac{1}{3y^3}$ n) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

E.D.O. NO RESUELTAS RESPECTO DE LA DERIVADA.

10.- Integra:

a) $y''' = xe^x$, con $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ b) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ c) $y''^2 + y'^2 = y'^4$

d) Resuelve los problemas **11** y **12** de la primera hoja.

11.- TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. Sea la ecuación:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad y(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_0) = y'_0$$

donde (x_0, y_0, y'_0) es un punto que verifica la ecuación. Si la función F verifica que:

- F es una función de clase 1;
- exista $\frac{dF}{dy'}$ y es distinta de cero,

donde las condiciones anteriores se verifican en un entorno del punto (x_0, y_0, y'_0), entonces existe una única solución de la ecuación diferencial, que verifica las condiciones iniciales, definida en un entorno del punto dado. (**Indicación:** usa el Teorema de la Función Implícita).

12.- SOLUCIÓN SINGULAR. Dada la ecuación $F(x, y, y') = 0$, una función $f(x) = y$ se llama solución singular de la ecuación anterior si para cada punto $y_0 = f(x_0)$ se infringe la unicidad de soluciones de la ecuación.

a Una condición necesaria que verifica la solución singular, cuando F es una función de clase 1, es que $\frac{dF}{dy'} = 0$. ¿Por qué?

b Prueba que la condición anterior no es suficiente.

c Justifica por que la envolvente a una haz de curvas, solución de una ecuación diferencial, es una solución singular de la misma.

13.- En las E.D.O. no resueltas respecto de la derivada del tipo $x = f(y, y')$ o $y = f(x, y')$ se puede intentar un cambio de variable del tipo $y' = p$ considerando x función de p (soluciones paramétricas).

14.- Resuelve las siguientes E.D.O.: $yy' + (x - y)y' - x = 0$

Tipo $f(y, y') = 0$**:** a) $1 = y^{2/3} + (y')^{2/3}$ b) $y = y'e^{y'}$ c) $y' = e^{y'/y}$ d) $y^{2/5} + y'^{2/5} = a^{2/5}$ e) $y^4 - y'^4 - yy'^2 = 0$

Tipo $f(x, y') = 0$**:** a) $ay' + by'^2 = x$ b) $x = y' + \operatorname{sen} y'$ c) $x(1 + y'^2) = 1$ d) $y'^2 x = e^{1/y'}$

15.- a) Da un procedimiento general para resolver la ecuación de Lagrange:

$$y = xf(y') + g(y').$$

b) La ecuación de Clairaut $y = xy' + g(y')$ es uncaso particular de la ecuación de Lagrange, pero se puede encontrar un método sencillo de integrar la ecuación. Hállalo.

c) Resuelve: $y = xy' + \frac{a}{2y'}$; $y = 2xy' + \ln y'$; $y = 2xy' - y'^2$. Además da una solución del problema **5** de la hoja primera. En todos los casos encuentra una solución singular.

16.- Reduce el orden e integra las siguientes ecuaciones:

a) $y'y'' = y'^2 + y^2$ b) $y''^2 + 2y''y' + 3 = 0$ c) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

d) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ e) $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$ f) $y'' = 2yy'$ para $y(0) = y'(0) = 1$

g) Resuelve los problemas **9** y **10** de la primera hoja.

17.- Sea $F(x, y, y', y'', ..., y^{n)}) = 0$ una ecuación p-homogénea con respecto a los argumentos $y, y', ..., y^{n)}$, (e.d. $F(x, ky, ky', ky'', ..., ky^{n)}) = k^p F(x, y, y', y'', ..., y^{n)})$. Prueba que con el cambio de variable $y = e^{\int z dx}$ se reduce en una unidad el orden de la ecuación.

Integra la ecuación: $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$.