Nombre y apellidos.....

1.- Resuelve $y = 2xy' + \ln y'$.

Estamos ante una E.D.O de Lagrange:

derivando $y' = 2y' + 2xy'' + \frac{y''}{y'}$ despejando

$y' = -\left[2x + \frac{1}{y'}\right] y''$ haciendo el cambio $\boxed{y' = p}$

así $p = \left[-2x - \frac{1}{p}\right] \frac{dp}{dx}$ y despejando

$\boxed{\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}}$ E.D.O lineal no homogénea (p es la variable)

La homogénea $x' = -2/p\, x \iff \frac{x'}{x} = -2/p$ e integrando

$\ln|x(p)| = -2\ln p + k = \ln\frac{1}{p^2} + k$

y así $\boxed{x(p) = k\, 1/p^2}$

Solución particular: vemos que $x = -\frac{1}{p}$ es una solución part. E.C. (usar variación de las constantes)

Solución general: $\boxed{x(p) = k\, 1/p^2 - 1/p}$ (•)

Ahora $p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dp}} = p\frac{dx}{dp} = p\left[k\frac{-2}{p^3} + \frac{1}{p^2}\right] = \boxed{\frac{-2k}{p^2} + 1/p}$

despejando x

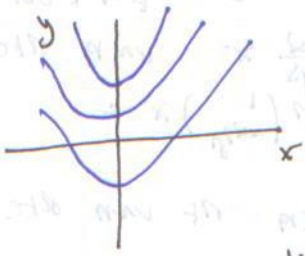
Integrando la p $\int \frac{dy}{dp} = \boxed{y} = \int \frac{-2k}{p^2} + 1/p\, dp = \boxed{\frac{2k}{p} + \ln p + k_0}$ (••)

(•) y (••) una solución paramétrica de la E.D.O de arriba. Falta determinar k_0 entrando en la E.D.O

$y = \boxed{\frac{2k}{p} + \ln p + k_0} = 2xy' + \ln y' = 2\left(k\, 1/p^2 - \frac{1}{p}\right)p + \ln p = \boxed{\frac{2k}{p} - 2 + \ln p}$

Así $k_0 = -2$ y $k \in \mathbb{R}$.

2.- Encuentra la familia de curvas ortogonales a las parábolas $y = x^2 + K$, con $K \in \mathbb{R}$.



$y = x^2 + k$ derivando $y' = 2x$.

Luego $y' = 2x$ es la E.D.O que describe la familia de curvas. La nueva E.D.O

$y'(x) = -\frac{1}{2x}$ nos da la familia de curvas ortogonales a las parábolas. Integrando

$\int y'(x)\,dx = \int -\frac{1}{2x}\,dx \iff y(x) = -\frac{1}{2}\ln x + k$

Luego $\boxed{y(x) = \ln\frac{1}{\sqrt{x}} + k}$ $k \in \mathbb{R}$

es la familia buscada

3.- Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

Sea P un cambio lineal de coordenadas del plano real. Demuestra que dicho cambio conserva las siguientes propiedades de las trayectorias:

a) Acotación y no acotación.

b) Convergencia hacia el origen cuando $t \to \pm\infty$.

c) $\{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ es una recta del plano.

d) Existencia o no del límite $\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$, incluyendo los límites infinitos.

SEA $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$ CON $|P| = p_1 p_4 - p_2 p_3 \neq 0$ Y $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

UN CAMBIO DE COORDENADAS SOBRE $\mathbb{R}^2$

a) $|\bar{x}| \leq |p_1|\,|x| + |p_2|\,|y|$ LUEGO SI $(x(t), y(t))$ ES
$|\bar{y}| \leq |p_3|\,|x| + |p_4|\,|x|$. UNA CURVA ACOTADA, TAMBIÉN LA CURVA $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$

SI (x, y) NO ESTÁ ACOTADA, $(\bar{x}, \bar{y})$ TAMPOCO LO ESTÁ
YA QUE $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ Y POR LO ANTERIOR LA ACOTACIÓN DE $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ IMPLICA LA DE (x, y).

b) $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ES UNA APLICACIÓN LINEAL Y CONTINUA.

SI $\|P\|_\infty = \max_{j=1,2,3,4} |p_j|$.

Y $v = (v_1, v_2)$ $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ ENTONCES

$$\|Pv - Pw\|_\infty = \|P(v-w)\|_\infty = \max\{|p_1(v_1-w_1) + p_2(v_2-w_2)|, |p_3(v_1-w_1) + p_4(v_2-w_2)|\} \leq$$

$$\leq 2\|P\|_\infty \|v-w\|_\infty \xrightarrow[\|v-w\|_\infty \to 0]{} 0$$

(SI $w \to v \iff \|v-w\|_\infty \to 0$).

LUEGO SI $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} (0,0) \Rightarrow P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$.

c) SEA $\alpha x + \beta y = \gamma \Rightarrow y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta} = \gamma/\beta - \frac{\alpha}{\beta} x$ UNA RECTA.

ASÍ $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \gamma/\beta - \alpha/\beta\, x \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma/\beta \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha/\beta \end{pmatrix} x =$

$= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} x$ ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE UNA RECTA.

d) $\frac{\bar{y}(t)}{\bar{x}(t)} = \frac{p_3 x + p_4 y}{p_1 x + p_2 y} = \frac{1}{\frac{p_1}{p_3} + \frac{p_2}{p_3}\frac{y}{x}} + \frac{1}{\frac{p_1}{p_4}\frac{x}{y} + \frac{p_2}{p_4}}$

ASÍ SI $\exists \lim_{t\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \ell$ ($\Rightarrow \exists \lim_{t\to\pm\infty} \frac{x}{y} = \frac{1}{\ell}$ PUEDEN SER CERO O ∞)

ASÍ $\exists \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\bar{y}(t)}{\bar{x}(t)} = \frac{1}{\frac{p_1}{p_3} + \frac{p_2}{p_3}\ell} + \frac{1}{\frac{p_1}{p_4}\frac{1}{\ell} + \frac{p_2}{p_4}}$.