

ÁLGEBRA LINEAL.

Diagonalización de un Endomorfismo. Introducción.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea f un **endomorfismo** sobre V

$$\begin{aligned} f &: V \rightarrow V \\ v &\rightarrow f(v), \end{aligned}$$

una aplicación lineal de V en si mismo.

Dada $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una **base** de V , el endomorfismo f se puede escribir de forma matricial

$$f(v) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k f(v_k) =$$

$$\begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & \dots & f(v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Av,$$

donde la matriz $A = (a_{i,j})$ tiene por columnas a

$$f(v_i) = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} v_k \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo 1. Consideramos la aplicación lineal sobre \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\rightarrow f(x, y, z, t) = (x + x, x + y, x + z, x + t). \end{aligned}$$

Demostración: En este ejemplo estamos dando por supuesto que trabajamos con la **base canónica** de \mathbb{R}^4 , $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. En este caso la

forma matricial de la aplicación es

$$f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \square$$

Si tomamos otra base distinta de B , sea ésta $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ de modo que

$$w_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,i} v_k \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n,$$

entonces las coordenadas $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ en la nueva base de V verifican que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

La matriz $Q = (\lambda_{i,j})$ es la **matriz de cambio de base**, cuyas columnas son las coordenadas de w_i respecto de la base B .

Nuestro endomorfismo f va a cambiar de aspecto si se considera coordenadas en la nueva base. En concreto si

$$f(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = f(x_1, \dots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

Según el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

sustituyendo en $(*)$, tenemos que

$$f(v)_{\text{coordenadas en } B} = Q \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = A Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

y despejando

$$f(v)_{\text{coordenadas en } B'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Q es una matriz de cambio de base y por tanto invertible. En la última igualdad $f(v)$ viene dada en coordenadas respecto de la nueva base B' . Así tenemos que f , el mismo endomorfismo, está escrito de dos formas distintas:

$$f(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y

$$f(v) = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

en las dos fórmulas $f(v)$ es el mismo vector escrito en coordenadas distintas; respecto de la base B y respecto de la base B' respectivamente.

Podemos usar la propiedad anterior para simplificar o conseguir una matriz del endomorfismo $Q^{-1}AQ$ lo más sencilla posible, por ejemplo

que sea del tipo diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Esto no siempre va a ser posible, pero si en algunos casos interesantes.

Ejemplo 2. En el ejemplo anterior: $f(x, y, z, t) = (x + x, x + y, x + z, x + t)$, la matriz asociada a f es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a buscar una base para que sea más sencilla la matriz asociada a f .

Demostración: Nos fijamos en el vector $u = (1, 1, 1, 1)$, el cuál verifica que

$$f(u) = (2, 2, 2, 2) = 2u.$$

Si tomamos la base $B' = \{u, e_2, e_3, e_4\}$, como

$$f(u) = 2u, f(e_2) = e_2, f(e_3) = e_3, \text{ y } f(e_4) = e_4,$$

la matriz asociada a f respecto de la nueva base B' va a ser

$$C = (f(u) \ f(e_2) \ f(e_3) \ f(e_4)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que llegamos al mismo resultado con el cambio de variables correspondiente. Como

$$\begin{array}{rcl} u & = & e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ e_2 & = & e_2 \\ e_3 & = & e_3 \\ e_4 & = & e_4 \end{array} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde Q es la matriz de cambio de base. Calculamos su inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C \quad \square \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior ha aparecido el vector u de forma mágica. en lo que sigue veremos como encontrar este tipo de vectores especiales llamados **autovectores** o **vectores propios**.