ÁLGEBRA LINEAL.

Cálculo de Autovalores.

Para encontrar un autovalor de un endomorfismo $f : V \to V$ con matriz asociada

$$f(v) = Av \qquad\qquad A \in M_n,$$

hay que plantear el sistema lineal

$$Av = \lambda v \qquad \Leftrightarrow \qquad Av - \lambda v = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Este sistema tiene que tener solución no trivial. Es decir, la matriz de coeficientes no puede tener rango máximo. Luego su determinante tiene que ser nulo:

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Lo anterior es una ecuación en λ cuyas soluciones son los autovalores de la matriz A.

Proposición 1. *Sea una matriz cuadrada $A \in M_n$ y sea la aplicación lineal asociada*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n & & \\ & & v & \to & f(v) & = & Av. \end{array}$$

Los autovalores de la matriz A (o del endomorfismo f) son las soluciones de la ecuación en λ

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Demostración: La anterior. Además si λ es solución de la ecuación, el sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

tiene solución no nula, y así hallamos el correspondiente autovector para λ $\square$

Ejemplo 1. *Buscamos los autovalores de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Demostración: Planteamos la ecuación

$$0 = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = (4-\lambda+2)(4-\lambda-2) =$$

$$(6-\lambda)(2-\lambda).$$

Así $\lambda = 6$ y $\lambda = 2$ son los dos autovalores de la matriz □

Proposición 2. *Si* $A, B \in M_n$ *son matrices semejantes, entonces tienen los mismos autovalores.*

Demostración: Supongamos que $B = Q^{-1}AQ$, con $|Q| \neq 0$, entonces

$$0 = |B - \lambda I| = |Q^{-1}AQ - \lambda I| = |Q^{-1}AQ - \lambda Q^{-1}Q| =$$

por la propiedad distributiva del producto de matrices

$$|Q^{-1}(A - \lambda I)Q| = |Q^{-1}||A - \lambda I||Q|,$$

donde hemos usado la fórmula del determinante de un producto. Ahora como $|Q| \neq 0$, se sigue que

$$0 = |B - \lambda I| \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = |A - \lambda I|.$$

Luego los autovalores de B son los de A y viceversa □

Ejercicio 1. *Si* A *y* B *son matrices regulares, hay que ver que* AB *y* BA *tienen los mismos autovalores.*

Demostración:

$$|AB - \lambda I| = |AB - \lambda B^{-1}B| = |B^{-1}BAB - \lambda B^{-1}B| =$$

usando la propiedad distributiva del producto de matrices

$$|B^{-1}(BA - \lambda I)B| = |B^{-1}||BA - \lambda I||B|.$$

Como $|B| \neq 0$, se sigue que

$$0 = |BA - \lambda I| \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = |AB - \lambda I| \qquad □$$

Definición 1. *Dada una matriz cuadrada* $A \in M_n$ *se llama* ***ecuación característica*** *de* A *a la ecuación*

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Observación 1. *Como hemos visto en la ecuación Proposición anterior, dos matrices semejantes tienen la misma ecuación característica.*

A la expresión $|A - \lambda I|$ se la denomina polinomio característico. Veamos el pro qué de este nombre.

Proposición 3. *Sean $A \in M_n$ y $|A - \lambda I| = 0$ su ecuación característica. Esta ecuación es una ecuación polinómica de grado n*

Demostración: Llamamos $B = (b_{i,j}) = A - \lambda I$, así

$$0 = |A - \lambda I| = |B| = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & & a_{1,n} \\ & \ddots & \\ a_{n,1} & & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} =$$

usando la definición de determinante

$$\sum_{f \in S_n} (-1)^{[f]} b_{f(1),1} \ldots . b_{f(n),n} =$$

$$(a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \ldots ..(a_{n,n} - \lambda) + \sum_{f \in S_n \setminus \{I\}} (-1)^{[f]} b_{f(1),1} \ldots . b_{f(n),n}.$$

El primer sumando es un polinomio de grado n en λ, mientras que los siguientes son polinomios en λ de grados menores $\square$

Observación 2. *La ecuación algebraica de grado n*

$$|A - \lambda I| = 0$$

tiene n soluciones complejas (ver Lecciones sobre Números Complejos). Algunas de estas raíces pueden ser reales, o bien simples o de distintas multiplicidades.

Para nuestro estudio, el caso más favorable es que **todas** las raíces sean reales simples. Algo menos favorable es que sean todas reales con multiplicidades diversas. En todo caso, siempre puede hacerse un estudio completo indpendientemente de como sean las raíces de la ecuación característica. Nosotros **no** vamos a verlo en estas lecciones.

Ejemplo 2. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. *Vamos a calcular sus autovalores.*

Demostración: Escribimos su ecuación característica

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la primera fila

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 12 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -4-\lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - 2)[(4+\lambda)(5-\lambda) - 24] - 4[6 - (4+\lambda)] =$$

$$(\lambda - 2)[-\lambda^2 + \lambda - 4] - 4[2-\lambda)] = (\lambda - 2)[-\lambda^2 + \lambda] =$$

$$\lambda(\lambda - 2)(1-\lambda).$$

Los autovalores de la matriz son

$$\lambda = 0; \ \lambda = 1 \quad \text{y} \quad \lambda = 2.$$

Tres autovalores reales y distintos, por tanto la matriz A es diagonalizable, es decir es semejante a una matriz diagonal $\square$

Ejemplo 3. *Sea* $C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. *Vamos a calcular sus autovalores.*

Demostración: Escribimos su ecuación característica

$$0 = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la segunda fila

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)[(4+\lambda)(\lambda-3) + 10] = (1-\lambda)[\lambda^2 + \lambda - 2] =$$

$$(1-\lambda)^2(\lambda + 2).$$

Los autovalores de la matriz son

$$\lambda = 1; \quad \text{y} \quad \lambda = -2.$$

El primero tiene multiplicidad 2, luego si $dimKer(A - I) = 2$, entonces la matriz A es diagonalizable, es decir es semejante a una matriz diagonal. En otro caso no lo será $\square$

En el ejemplo anterior podemos observar que para $\lambda = 1$, el sistema

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} -5x & & -2z & = & 0 \\ 5x & +y & +2z & = & 0 \end{array} \right.$$

tiene por solución un espacio vectorial de dimensión 1 ya que

$$Rang(A - I) = Rang\begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Luego la matriz A no es diagonalizable pués

$$dimL_1 + dimL_2 = 1 + 1 = 2 < 3.$$

Ejemplo 4. *Se considera la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en si mismo:*

$$G(x_1, x_2) = (x_1 \cos\alpha + x_2 \operatorname{sen}\alpha, -x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha).$$

Vamos a tratar de explicar por que esta aplicación lineal no tiene autovalores reales.

Demostración: Para ver que G es una aplicación lineal, es suficiente con escribirla de forma matricial

$$G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

recordando el producto de complejos, también se puede escribir como

$$(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)(x_1 + ix_2).$$

Lo que vimos de complejos nos dice que estamos ante un giro del plano de centro el origen y ángulo $-\alpha$.

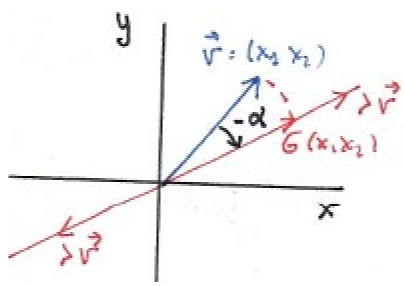

Figura 1. Giro de ángulo $-\alpha$.

Geométricamente G no puede tener autovectores (autovalores reales) ya que si existiese λ y $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $G(v) = \lambda v$, $G(v)$ estaría sobre la recta en la que se apoya v lo cual solo puede ocurrir si $\alpha = 0$.

Analíticamente

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha =$$

$$1 - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2.$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son

$$\lambda = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm i\operatorname{sen}\alpha.$$

Salen dos autovalores complejos conjugados. No hay autovalores reales ni autovectores en $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es