ÁLGEBRA LINEAL.

La Regla de Cramer.

Consideramos un sistema lineal de n ecuaciones y m incógnitas

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,m}x_m &= b_n \end{aligned}$$

o de forma matricial

$$Ax = b,$$

donde A es la matriz $n \times m$ de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Tenemos dos métodos para resolverlo:

- escalonándolo con el Método de Eliminación de Gauss.
- Si A es cuadrada y tiene inversa, despejando la x

$$x = A^{-1}b.$$

Observación 1. *Como vimos al estudiar el Método de Eliminación de Gauss, si una ecuación del sistema es combinación lineal de otras, podemos prescindir de ella. El conjunto de soluciones del sistema resultante es el mismo que él del sistema original.*

Ejemplo 1. *Consideramos el sistema:*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}$$

Demostración:

Usando Gauss: si a la tercera ecuación le restamos la primera ($E_3 - E_1$), tenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & - & 3z & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow_{E_3+E_2} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \end{array}$$

y ahora despejando vemos que $z = 0$, $y = 0$ y $x = 1$.

Usando la matriz inversa: el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 3 - 2 = -1 \neq 0,$$

luego existe la matriz inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ahora despejando en el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Regla de Cramer.

Si una matriz cuadrada $A \in M_n$ tiene determinante no nulo, entonces el sistema

$$Ax = b$$

tiene por solución única

$$x = A^{-1}b.$$

Otra forma de llegar a la solucón única sin calcular la matriz inversa es la siguiente.

Teorema 1. *(**Regla de Cramer**) Sea el sistema*

$$Ax = b$$

donde la matriz de coeficientes $A = (a_{i,j}) \in M_n$ *tiene determinate* $|A| \neq 0$ *no nulo y donde* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, *entonces*

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \textit{para} \qquad i = 1, 2, .., n$$

es la única solución del sistema.

Demostración: Como $|A| \neq 0$, tenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

utilizando la fórmula de la matriz inversa por determinates

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A_{1,1}| & |A_{2,1}| & \cdots & |A_{n,1}| \\ \vdots & & & \\ |A_{1,i}| & |A_{2,i}| & \cdots & |A_{n,i}| \\ \vdots & & & \\ |A_{1,n}| & |A_{2,n}| & \cdots & |A_{n,n}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

así, para cada $i = 1, 2, .., n$,

$$x_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} |A_{j,i}| b_j =$$

que es el desarrollo del determinante siguiente por la columna i-ésima

$$\frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad \square$$

Ejemplo 2. *Consideramos el sistema:*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración: Como el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 3 - 2 = -1 \neq 0,$$

usando la regla de cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 1; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 0; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 0 \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es