

ÁLGEBRA LINEAL.

Sistemas Compatibles indeterminados. Caso Homogéneo.

Consideramos un sistema lineal de n ecuaciones y m incógnitas **homogéneo**:

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m &= 0 \\a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,m}x_m &= 0 \\&\vdots \\a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m &= 0\end{aligned}$$

o de forma matricial

$$Ax = 0.$$

O también, viendo $A = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m)$ como vectores columnas,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Como sabemos un sistema **homogéneo** siempre es **compatible**.

Proposición 1. *Sea un sistema **homogéneo***

$$Ax = 0$$

con $A \in M_{n \times m}$ y con $\text{Rang} A = r$. Entonces:

- a) *El conjunto de soluciones S del sistema es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.*
- b) *$\dim S = m - r$*
- c) *El sistema tiene **solución única** si y solo si $r = m$.*
- d) *El sistema es indeterminado si y solo si $r < m$.*

Demostración: El **Teorema del Rango** nos dice que

$$\text{Rang} A = r \leq \min\{n, m\}.$$

Consideramos ahora la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow f(x) = Ax. \end{aligned}$$

Claramente

$$\text{Ker } f = S$$

y por (*)

$$\text{Im } f = L[C_1, C_2, \dots, C_n].$$

Por la definición de rango de una matriz, tenemos que

$$\dim \text{Im } f = \text{Rang } A = r.$$

Así $S \subset \mathbb{R}^m$ es un subespacio vectorial y por el **Teorema de la Dimensión**

$$m = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f \quad \Leftrightarrow \dim S = m - r.$$

Ahora, la solución es única si y solo si $\dim S = 0$, lo cual es equivalente a que $m = r$.

En el caso

$$\text{Rang } A = r < m,$$

no puede tener solución única, por lo anterior y por que $\dim S \geq 1$
□

En un sistema homogéneo indeterminado ¿como se presenta las soluciones ?

El propio sistema nos da unas **ecuaciones implícitas** del subespacio de soluciones S . Para tener más información sobre S , como por ejemplo encontrar una base del mismo, podemos proceder del siguiente modo. Usamos la notación de arriba. Si $\text{Rang } A = r$ y

$$\text{Rang } A = r < m,$$

tiene que existir (por definición de rango) $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_r}$ filas, en la matriz, linealmente independientes y por tanto un menor de orden r

$$\left| D \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ j_1 & j_2 & \dots & j_r \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

Reescribimos el sistema como

$$\begin{aligned} a_{i_1, j_1} x_{j_1} + \dots + a_{i_1, j_r} x_{j_r} &= - \sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} a_{i_1, j} x_j \\ a_{i_2, j_1} x_{j_1} + \dots + a_{i_2, j_r} x_{j_r} &= - \sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} a_{i_2, j} x_j \\ &\vdots \\ a_{i_r, j_1} x_{j_1} + \dots + a_{i_r, j_r} x_{j_r} &= - \sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} a_{i_r, j} x_j. \end{aligned}$$

Este es un sistema cuadrado, de r ecuaciones y $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ r incógnitas, que tiene solución única. Claro, en función de los parámetros x_j con $j \neq j_1, j_2, \dots, j_r$. Es decir

$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_r} \end{pmatrix} = \left(D \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ j_1 & j_2 & \dots & j_r \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} a_{i_1, j} x_j \\ -\sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} a_{i_2, j} x_j \\ \vdots \\ -\sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} a_{i_r, j} x_j \end{pmatrix}.$$

Las soluciones son múltiples y dependen de los $m - r$ parámetros x_j con $j \neq j_1, j_2, \dots, j_r$.

Ejemplo 1. *Tenemos el sistema:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 5y & + & 2z & + & 4t & = & 0 \\ x & - & 4y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ 5x & + & y & - & 4z & - & t & = & 0 \end{array}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración: Vamos a estudiar sus soluciones. El menor

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Orlamos con un menor de orden 3

$$\left| D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

haciendo ceros en la primera columna

$$(*) \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 21 & -9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 21 & -9 \end{vmatrix} = 63 - 21 = 42 \neq 0.$$

La matriz de coeficientes tiene rango máximo (3) y la matriz ampliada tampoco puede tener rango mayor que 3. Luego el sistema es **compatible indeterminado**, ya que

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} = 3 < 4 \quad \text{incógnitas.}$$

El subespacio solución S tiene dimensión

$$\dim S = 4 - 3 = 1.$$

S tiene por ecuaciones implícitas (usando $(*)$),

$$\begin{array}{rclcl} 3x & - & 5y & + & 2z & = & -4t \\ x & - & 4y & + & z & = & -3t \\ 5x & + & y & - & 4z & = & t. \end{array}$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 4y & + & z & = & -3t \\ & & 7y & - & z & = & 5t \\ & & 21y & - & 9z & = & 16t \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rclcl} x & - & 4y & + & z & = & -3t \\ & & 7y & - & z & = & 5t \\ & & & & -6z & = & t. \end{array}$$

Despejando

$$\begin{array}{rcl} x & = & -3t + t/6 + 4(29t/42) = -t/14 \\ y & = & \frac{1}{7}(-t/6 + 5t) = 29t/42 \\ z & = & -t/6 \\ t & = & t \end{array}.$$

Luego

$$S = \{ (-t/14, 29t/42, -t/6, t) : t \in \mathbb{R} \} = L[(-1/14, 29/42, -1/6, 1)] \quad \square$$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FA-
CULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es