ÁLGEBRA PRÁCTICA-10

Nombre y apellidos..

1.- Discute el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right.$

EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$

ES UN DETERMINANTE DE VANDERMONDE.

ASÍ $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a) = \begin{cases} 0 & \text{SI } c=b \text{ Ó } c=a \text{ Ó } b=a \\ \text{NO NULO} & \text{SI } a,b \text{ Y } c \text{ SON DISTINTOS DOS A DOS} \end{cases}$

EN EL SEGUNDO CASO EL SISTEMA TIENE SOLUCIÓN ÚNICA:

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\d&b&c\\d^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}{(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)} \; ; \; y = \frac{(d-a)(c-d)}{(c-b)(b-a)} \quad y \quad z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$$

SI $c=b$, $a\neq b$ LA MATRIZ AMPLIADA ES $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&b&d\\a^2&b^2&b^2&d^2\end{pmatrix}$ APLICANDO ROUCHÉ-FRÖBENIUS

SI $d\neq a$ Y $d\neq b$ EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN

SI $d=a$ Ó $d=b$ EL SISTEMA ES COMPATIBLE Y

COMO $\begin{vmatrix}1&1\\a&b\end{vmatrix} = b-a \neq 0$ LA SOLUCIÓN SERÁ

$$\begin{matrix} x+y = 1-z \\ ax+by = d-bz \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix}1-z&1\\d-bz&b\end{vmatrix}}{b-a}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix}1&1-z\\a&d-bz\end{vmatrix}}{b-a}, \quad z\in\mathbb{R}$$

APLICANDO CRAMER

SI $a=b$, $c\neq b$ SI $d\neq a$ Y $d\neq c$ EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN

SI $d=a$ Ó $d=c$ EL SISTEMA ES COMPATIBLE Y

COMO $\begin{vmatrix}1&1\\b&c\end{vmatrix} = c-b \neq 0 \Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix}1-x&1\\b-bx&c\end{vmatrix}}{c-b} \quad z = \frac{\begin{vmatrix}1&1-x\\b&b-bx\end{vmatrix}}{c-b}, \quad x\in\mathbb{R}$

SI $a=c$, $b\neq c$ SI $d\neq a$ Y $d\neq b$ EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN

SI $d=a$ Ó $d=b$ SE SIGUEN COMO EN LOS DOS CASOS ANTERIORES.

SI $a=b=c$ RANG $\begin{pmatrix}1&1&1\\a&a&a\\a^2&a^2&a^2\end{pmatrix} = 1$. SI $d\neq a$ EL SISTEMA ES INCOMPATIBLE.

EN OTRO CASO ($a=d$) NOS QUEDA EL SISTEMA

$x+y+z=1$ (PLANO EN $\mathbb{R}^3$) O

EN PARAMÉTRICAS $\begin{matrix} x = 1-y-z \\ y = y \\ z = z \end{matrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_1, \lambda_2 \in\mathbb{R}$.

2.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, una aplicación lineal que viene dada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcula $f^{-1}(\,(2,0,-2)\,)$ conociendo que $(2,1,0,-1) \in f^{-1}(\,(2,0,-2)\,)$.

$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$; $f^{-1}((2,0,-2))$ ES LA

SOLUCIÓN DEL SISTEMA $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

COMO EL RANGO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES 3 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

EL SISTEMA ES COMPATIBLE Y SE TIENE QUE

$f^{-1}((-2,-1,2,1)) = \underbrace{(2,1,0,-1)}_{\text{SOL. PARTICULAR PARA}} + \underbrace{\ker f}_{\text{SOLUCIÓN DEL SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO}}$

DONDE $\dim \ker f = 4 - 3 = 1$; $f(x,y,z,t) = 0 \iff \begin{cases} x - y + z = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow x = -2t$

LUEGO $f^{-1}((2,0,-2)) = (2,1,0,-1) + \mathcal{L}[(-2,-1,2,1)]$.

3.- Sea $K = \{\,(x,y,z,w)\ :\ \begin{cases} x = 2a + b + c - 1 \\ y = -a - 2b + c + 2 \\ z = a + 3b - 2c - 5 \\ w = 4a - 2b + 6c + 4 \end{cases},\ a,b,c \in \mathbb{R}\,\}$. Encuentra una ecuaciones implícitas de K (o equivalentemente, elimina los prarámetros a, b y c en la definición de K.

TENEMOS $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z+5 \\ w-4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

YA QUE $C_3 - (C_1 - C_2) = 0$

PARA QUE EL SISTEMA SEA COMPATIBLE LA MATRIZ $\left(\begin{array}{c|cc} x+1 & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z+5 & 1 & 3 \\ w-4 & 4 & -2 \end{array}\right)$

TIENE QUE TENER RANGO 2 Y COMO $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0$

ASÍ

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z+5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 3 - 4z - 20 + y - 2 + z + 5 + 2x + 2 - 6y + 12 = -x - 5y - 3z - 6$$

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ w-4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2x + 2 - 4w + 16 - 4y - 8 + w - 4 + 8x + 8 + 4y - 8 = 10x - 3w + 6$$

ASÍ $K = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} -x - 5y - 3z = 6 \\ 10 \quad - 3w = -6 \end{cases} \}$.