ÁLGEBRA PRÁCTICA-11

Nombre y apellidos..

1.- Se considera el endomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$g(x, y, z) = (2y - z, 2x - z, 2x - y).$$

1_1.- Discute (sin resolver) el sistema $g(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

. Por tanto el sistema que tenemos que resolver es

$$\left.\begin{aligned} 2y - z &= \lambda x \\ 2x \quad - z &= \lambda y \\ 2x - y \quad &= \lambda z \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} -\lambda x + 2y - z &= 0 \\ 2x - \lambda y - z &= 0 \\ 2x - y - \lambda z &= 0 \end{aligned}\right.$$

El determinante de la matriz de coeficientes es.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - \lambda F_1}}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2+\lambda & -\lambda-2 & 0 \\ 2+\lambda^2 & -1-2\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2+\lambda & -(\lambda+2) \\ 2+\lambda^2 & -(1+2\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= (2+\lambda)(1+2\lambda) - (2+\lambda^2)(\lambda+2) = (\lambda+2)\left[1+2\lambda-2-\lambda^2\right] =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda-1)^2 \neq 0$$ el sistema tiene solución única $(x,y,z)=0$

Si $\lambda = -2$ $\quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$ luego el sistema tiene una solución indeterminada de dimensión $3-2=1$

Si $\lambda = 1$ $\quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ luego el sistema tiene solución indeterminada de dimensión $3-2=1$

1_2.- ¿ qué valores de λ son autovalores del endomorfismo g?

Para $\lambda=-2$ y $\lambda=1$ la ecuación $g(x,y,z)=\lambda(x,y,z)$ tiene soluciones no triviales, luego son autovalores

1_3.- Para cada autovalor de g calcula la base del correspondiente subespacio invariante L_λ.

PARA $\boxed{\lambda=-2}$ $L_{-2} = \{v \in \mathbb{R}^3 : g(v) = -2v\}$ LUEGO ES LA SOLUCIÓN

DE

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 0 \\ \cancel{2x + 2y - z} &\cancel{= 0} \\ 2x - y + 2z &= 0 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2y - z &= -2x \\ -y + 2z &= -2x \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2y - z &= -2x \\ 3y &= -6x \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= x \\ y &= -2x \\ z &= -2x \end{aligned} \quad \text{ASÍ} \quad L_{-2} = L[(1,-2,-2)]$$

$E_2 + 2E_1$

AUTOVECTOR

PARA $\boxed{\lambda=1}$ $L_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 : g(v) = v\}$ IGUAL A LA SOLUCIÓN DE:

$$\begin{aligned} -x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \\ \cancel{2x - y - z} &\cancel{= 0} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{aligned} x - 2y &= -z \\ 2x - y &= z \end{aligned} \quad \underset{E_2 - 2E_1}{\Leftrightarrow} \quad \begin{aligned} x - 2y &= -z \\ 3y &= 3z \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{LUEGO} \quad L_1 = L[(1,1,1)]$$

1_4.- ¿Es g un endomorfismo que se pueda diagonalizar?

$\dim L_{-2} + \dim L_1 = 1 + 1 < 3$, LUEGO g <u>NO</u> SE PUEDE DIAGONALIZAR.

2.- Sea el problema: ¿cuántas parejas de conejos se tendrán en un año, comenzando con una sola pareja, si cada mes cada pareja da origen a una nueva, la cuál se vuelve a reproducir a partir del segundo mes? Se pide plantear el problema de forma matricial.

AL INICIO HAY $x_0 = 1$ PAREJAS

EN EL 1º MES HAY $x_1 = 1 = x_0$ PAREJAS

EN EL 2º MES HAY $x_2 = x_0 + x_0 + (x_1 - x_0) = x_0 + x_1 = 2$ PAREJAS

PAREJAS NACIDAS EN MES ANTERIOR NO REPRODUCTORAS.

$\vdots$

EN EL k MES HAY $x_k = x_{k-2} + x_{k-2} + (x_{k-1} - x_{k-2}) = x_{k-2} + x_{k-1}$ PAREJAS

PAREJAS REPRODUCTORAS — PAREJAS NACIDAS

SI $y_n = x_{n-1} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} \end{aligned} \right| _{n \geq 2}$ $\quad x_1 = 1$, $\quad y_1 = x_0 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{Y ASÍ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$