ÁLGEBRA PRÁCTICA-12

Nombre y apellidos..

1_1.- Calcula $A^{33} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{33}$.

AUTOVALORES DE LA MATRIZ:

$0 = |A - \lambda I| = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda) =$
$= (1+\lambda)^2(1-\lambda)$.

ASÍ $\lambda = -1$ CON MULTIPLICIDAD 2 Y
$\lambda = 1$ CON MULTIPLICIDAD 1 SON LOS AUTOVALORES

AUTOVECTORES ASOCIADOS PARA $\boxed{\lambda = -1}$ $(A+I)x = 0 \iff$

$\iff 2x + 4y + 6z = 0 \iff 2x = -4y - 6z$

SI $y = 1$ Y $z = 0 \Rightarrow (-2, 1, 0)$
Y SI $y = 0$ Y $z = 1 \Rightarrow (-3, 0, 1)$
SON DOS AUTOVECTORES INDEPENDIENTES

$L_{-1} = L[(-2,1,0), (-3,0,1)]$

$\boxed{\text{PARA } \lambda = 1}$ $(A - I)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} 4y + 6z = 0 \\ -2y = 0 \\ -2z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (1,0,0)$ AUTOVECTOR

$L_1 = L[(1,0,0)]$.

MATRIZ DE PASO $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ASÍ $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Y POR TANTO $\boxed{A^{33} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{33} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1} = A}$

1_2.- ¿Y A^{34} ? EN ESTE CASO, COMO

$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}$

Y ASÍ $\boxed{A^{34} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{34} Q^{-1} = Q \cdot I \cdot Q^{-1} = I}$

OBSERVEMOS QUE $A^{2n+1} = A \quad n \in \mathbb{N}$

Y $A^{2n} = I \quad n \in \mathbb{N}$.

2.- Dos sucesiones de números reales $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ verifican que:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 6x_n - y_n \\ y_{n+1} &= 3x_n + 2y_n \end{aligned}$$

Calcula $\frac{1}{4}(3x_{n+1} + y_{n+1})$ en función de n si $x_1 = y_1 = 1$.

DE FORMA MATRICIAL

$x_{n+1} = 6x_n - y_n$
$y_{n+1} = 3x_n - 2y_n$ $\iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ LUEGO

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SEA $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ VAMOS A DIAGONALIZARLA ¡SI ES POSIBLE!

AUTOVALORES $0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 15$

LA ECUACIÓN DE 2º GRADO TIENE POR SOLUCIONES

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

AUTOVECTORES PARA $\lambda = 5$ $(A - 5I) = 0 \iff x - y = 0$

LUEGO $(1,1)$ ES UN AUTOVECTOR

PARA $\lambda = 3$ $(A - 3I) = 0 \iff 3x - y = 0$

LUEGO $(1,3)$ ES UN AUTOVECTOR Y SI TENEMOS QUE

MATRIZ DE PASO $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^n = Q \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} Q^{-1}$

CÁLCULO DE Q^{-1} USANDO EL MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

LUEGO $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 3^n \\ 5^n & 3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

AHORA $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 3^n \\ 5^n & 3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 3^n \\ 5^n & 3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n \\ 5^n \end{pmatrix}$

ASÍ $\boxed{\frac{1}{4}(3x_{n+1} + y_{n+1}) = \frac{1}{4}(3 \cdot 5^n + 5^n) = \frac{1}{4} 5^n (3+1) = 5^n}$