ÁLGEBRA PRÁCTICA-9

Nombre y apellidos...

1.- ¿ Por qué es nulo el determinante $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$?

SI A LA 4ª COLUMNA LE SUMAMOS LA 2ª Y LA 3ª

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = 0$$

EL DETERMINANTE ES NULO YA QUE AHORA LA CUARTA COLUMNA ES PROPORCIONAL A LA PRIMERA

2.- Calcula la matriz inversa de $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ usando la fórmula de adjuntos.

$|A_{11}| = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8-3=5$; $|A_{12}| = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$; $|A_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$|A_{21}| = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16$; $|A_{22}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$; $|A_{23}| = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5$

$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 13$; $|A_{32}| = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $|A_{33}| = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 5$.

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_2-F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{DESARROLLO 1 COLUMNA}}{=} -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -(15+14) = -29$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & |A_{13}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & |A_{23}| \\ |A_{31}| & |A_{32}| & |A_{33}| \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 5 & 16 & 13 \\ -3 & 2 & -2 \\ -7 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.- Calcula el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ usando determiantes.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 \neq 0$ luego las dos primeras filas de B son independientes y así $2 \leq \operatorname{rang} B \leq 4$.

Orlamos un menor de orden 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

luego las tres primeras filas son independientes

Orlamos menores de orden 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_4-(C_1+C_2+C_3)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Hemos encontrado un menor de orden 4 no nulo, luego el rango de la matriz es cuatro.

4.- Sean A y B dos matrices de orden $m \times n$. Prueba que el rango de la matriz suma $A+B$ no es mayor que la suma de los rangos de las matrices A y B.

Supongamos que $m \leq n$. Sea $[A] \subseteq \mathbb{R}^n$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por las m filas de A. Lo mismo para $[B] \subseteq \mathbb{R}^n$ y $[A+B] \subseteq \mathbb{R}^n$.

Así $\operatorname{Rang}(A+B) = \dim [A+B] \leq \dim([A]+[B]) =$

Fórmula de la dimensión

$= \dim [A] + \dim [B] - \dim([A] \cap [B]) \leq \dim [A] + \dim [B] = \operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B.$