Nombre y apellidos.....

1.- Representa el diagrama de fases del sistema $\begin{array}{rcl} x' & = & \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' & = & -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y \end{array}$

- UN ÚNICO PUNTO CRÍTICO $(0,0)$.
- AUTOVALORES $\begin{vmatrix} 3/2-\lambda & 1/2 \\ -1/2 & 5/2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 3-2\lambda & 1 \\ -1 & 5-2\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$

  ASÍ $\lambda = 2$ ES UN AUTOVALOR DOBLE.
- AUTOVECTORES $0 = (3/2 - 2)x + 1/2\, y \iff x = y$ Y $V_1 = (1,1)$ AUTOVECTOR

  COMO $\lambda = 2 > 0$, ES DOBLE Y SOLO HAY UN AUTOVECTOR $(0,0)$ ES UN NODO IMPROPIO INESTABLE.
- MATRIZ DE PASO LA MATRIZ J DE JORDAN ASOCIADA ES $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J$.

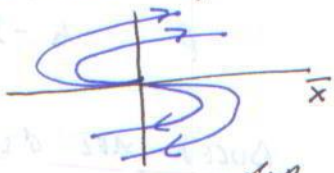
  Y LA MATRIZ DE PASO $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ VERIFICA QUE

  $V_2 = (1,3)$ RESOLVIENDO EL SISTEMA $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- ASÍ $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}P^{-1}$.

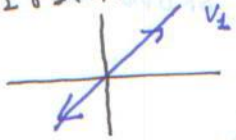
  LAS SOLUCIONES $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ SON $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

  PODEMOS HACER EL CÁLCULO Y REPRESENTARLAS.



- SIN OTRO CAMBIO $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$

  TIENE UN DIAGRAMA DE FASES.
- EL DIAGRAMA QUE BUSCAMOS ES ESTE MODIFICADO POR P.



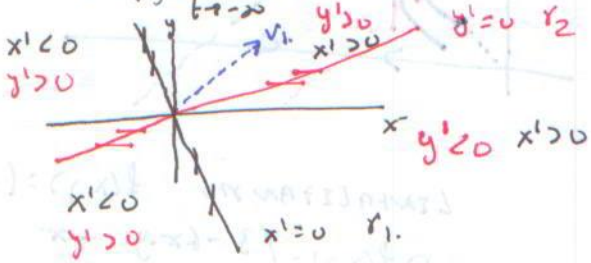
- TRAYECTORIAS RECTAS $e^{2t}V_1$ Y $-e^{2t}V_1$
- PENDIENTE DE TANGENTE $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}'$.

ASÍ $\frac{y'}{x'} = \frac{\bar{x}' + 3\bar{y}'}{\bar{x}' + \bar{y}'} = \frac{1}{1 + \bar{y}'/\bar{x}'} + \frac{3}{\frac{\bar{x}'}{\bar{y}'} + 1}$ $\begin{cases} \text{SI } \frac{\bar{y}'}{\bar{x}'} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{y'}{x'} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \frac{1}{1} \\ \text{SI } \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to-\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to-\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ PENDIENTE DE V_1

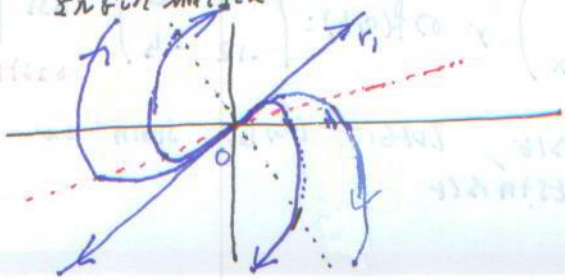
- REGIONES DE CRECIMIENTO

  r_1 $3/2\, x + 1/2\, y = 0 \Rightarrow y = -3x$

  r_2 $-1/2\, x + 5/2\, y = 0 \Rightarrow 5y = x$



- DIAGRAMA DE FASES CON LA INFORMACIÓN ANTERIOR



2.- Dibuja un boceto del diagrama de fases del sistema $\begin{array}{rcl} x' & = & x(3-3x-y) \\ y' & = & y(4-3x-y) \end{array}$, con $x, y \geq 0$.

Puntos críticos: $(x,y) = (0,0)$

si $x=0$ $\quad 0 = y(4-y) \Rightarrow y = 4$ así $(x,y) = (0,4)$

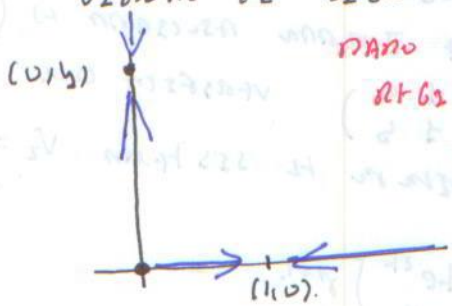
si $y=0$ $\quad 0 = x(x-3x) \Rightarrow x = 1$ así $(x,y) = (1,0)$

Ahora $0 = 3-3x-y$ no tiene solución. Luego tenemos 3 puntos críticos
$0 = 4-3x-y$

trayectorias rectas si $x=0$ $\quad y' = y(4-y)$ Luego hay trayectorias sobre $x=0$

si $y=0$ $\quad x' = x(3-3x)$ Hay trayectorias sobre $y=0$

Viendo el signo de $y(4-y)$ y de $x(3-3x)$ tenemos

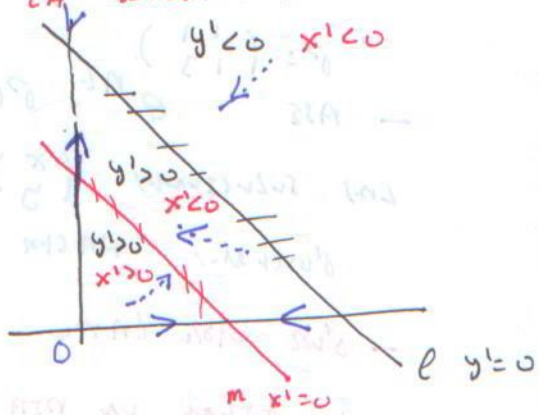


Dado que las trayectorias no se cortan, la región $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ es invariante. Es decir si (x,y) es una trayectoria con $x(0), y(0) \geq 0$, esta trayectoria no puede abandonar la región A.

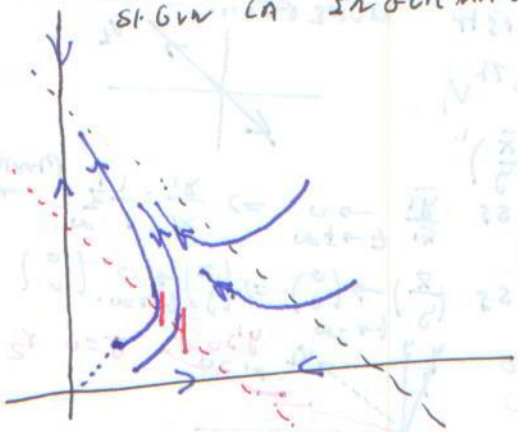
Regiones de crecimiento

m $\quad 3-3x-y=0 \quad x'=0$

l $\quad 4-3x-y=0 \quad y'=0$



Bosquejo del diagrama de fases según la información anterior



$(0,0)$ parece un nodo inestable

si linealizamos $\begin{array}{l} x' = 3x \\ y' = 4y \end{array}$ tiene autovalores $\lambda = 3$ y $\lambda = 4$ y $(0,0)$ es un nodo inestable del sistema linealizado

$(1,0)$ parece un punto de silla

$(0,4)$ parece un nodo estable

Linealizando $f(x,y) = (3x - 3x^2 - xy,\ 4y - y^2 - 3xy)$

$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 3-6x-y & -x \\ -3y & 4-2y-3x \end{pmatrix}$ y $Df(0,4) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$ así $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

sistema linealizado en $(0,4)$

tiene $\lambda = -4$ como raíz doble, luego $(0,4)$ será un foco estable o un foco impropio estable