Nombre y apellidos.....

1.- Sabemos que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{n!}$, que $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y que $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1_1.- Calcula los desarrollos en series de potencias, centrados en cero, de $\cosh x$ y de $\operatorname{senh} x$.

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k + (-1)^k x^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

LA SUMA DE LIMITES ES EL LIMITE DE LA SUMA

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k + (-1)^{k+1} x^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

2.- Se considera el sistema de E.D.O. lineales de primer orden y homogéneo:

$$x_i'(t) = x_{7-i+1}(t) \qquad i = 1, 2, .., 7.$$

2_1.- Calcula una matriz fundamental de sistema ϕ, tal que $\phi(0) = I$. DESARROLLANDO.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_7' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & \iddots & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{H} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \\ x_7 \end{pmatrix} \iff x' = Hx$$

LA MATRIZ FUNDAMENTAL BUSCADA ES e^{Ht}.

OBSERVEMOS QUE $H^2 = I$, LUEGO

$$e^{Ht} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I t^{2k}}{(2k)!} =$$

DEF

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ & \iddots & 0 & \\ & & \iddots & \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum \frac{t^{2k}}{(2k)!} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \sum \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{senh} t \\ 0 & \cosh t & & & & \operatorname{senh} t & 0 \\ & & \cosh \cdot \operatorname{senh} t & & & & \\ & & \cosh t + \operatorname{senh} t & & & & \\ & & \operatorname{senh} t & \cosh t & & & \\ 0 & \operatorname{senh} t & & & \cosh t & 0 & \\ \operatorname{senh} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

2_2.- Encuentra la solución que verifica que $x(0) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

$$x(t) = e^{Ht}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cosh t + \operatorname{senh} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3_1.- Calcula la transformada de Laplace de $\operatorname{senh} x$. (**Indicación:** no uses que $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$).

NO VAMOS A USAR LA LINEALIDAD DE OTRA POR TRANSFORMADA DE LAPLACE (LO PRIMERO $\mathcal{L}\,\operatorname{senh} x(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)(s) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\, e^x - \mathcal{L}\, e^{-x}\right) \underset{\text{TABLAS}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2-1} = \frac{1}{s^2-1}\Big).$$

USANDO SOLO LA DEFINICIÓN $\mathcal{L}(\operatorname{senh} x)(s) \underset{\text{DEFINICIÓN}}{=} \boxed{\int_0^\infty \operatorname{senh} x\, e^{-sx}\,dx =}$

$$\underset{\text{POR PARTES}}{=} -\frac{\operatorname{senh} x\, e^{-sx}}{s}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \cosh x\, e^{-sx}\,dx \underset{\substack{\operatorname{senh} 0 = 0 \\ \lim_{x\to\infty} \operatorname{senh} x\, e^{-sx} = 0 \\ s>1}}{=}$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty \cosh x\, e^{-sx}\,dx \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$$\frac{1}{s}\left[-\frac{\cosh x\, e^{-sx}}{s}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \operatorname{senh} x\, e^{-sx}\,dx\right] \underset{\substack{\lim_{x\to\infty} \cosh x\, e^{-sx} = 0 \\ s>1 \\ \cosh 0 = 1}}{=}$$

$$= \boxed{+\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \operatorname{senh} x\, e^{-sx}\,dx}$$ DESPEJANDO

$$\left(1 - \frac{1}{s^2}\right)\mathcal{L}(\operatorname{senh} x)(s) = +\frac{1}{s^2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\operatorname{senh} x)(s) = +\frac{1}{s^2}\,\frac{s^2}{s^2-1} = \frac{1}{s^2-1}}$$

3_2.- Calcula la transformada de Laplace de $\cosh x$. (**Indicación:** no uses que $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; si se puede usar el apartado anterior).

USANDO LA DEFINICIÓN.

$$\boxed{\mathcal{L}(\cosh x)(s) =} \int_0^\infty \cosh x\, e^{-sx}\,dx \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$$-\frac{\cosh x\, e^{-sx}}{s}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \operatorname{senh} x\, e^{-sx}\,dx \underset{\substack{\cosh 0 = 1 \\ \lim_{x\to\infty} \cosh x\, e^{-sx} = 0 \\ s>1}}{=}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}(\operatorname{senh} x)(s) \underset{\text{USANDO } 3_1}{=}$$

$$= 1/s\left(1 + \frac{1}{s^2-1}\right) = \frac{(s^2-1)+1}{s(s^2-1)} = \boxed{\frac{s}{s^2-1}}$$