Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-~~19~~ xxx-23

Nombre y apellidos.....

1.- Se consideran el problema $\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$ y $x_0(t)$ su solución. Hacemos el cambio de variable $y(t) = x(t) - x_0(t)$. Prueba que la E.D.O. resultante en y tiene por solución de equilibrio o constante a la solución $y \equiv 0$.

SI $y(t) = x(t) - x_0(t)$. DERIVANDO

$$\boxed{y'(t) = x'(t) - x_0'(t)} \underset{\text{USANDO LA ECUACIÓN}}{=} f(t, x(t)) - f(t, x_0(t)) =$$

$$= f(t, x(t) - x_0(t) + x_0(t)) - f(t, x_0(t)) = f(t, y(t) + x_0(t)) - f(t, x_0(t))$$

$$= \boxed{F(t, y(t))} \quad \text{DONDE } F(t, y) = f(t, y + x_0) - f(t, x_0).$$

ES CLARO QUE $y \equiv 0$ ES SOLUCIÓN DE LA NUEVA E.D.O

2.- Se llama ecuación de **Bernoulli** a toda E.D.O. del tipo

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x^n(t), \qquad n \geq 2,$$

donde p y q son funciones continuas.

2.1.- Prueba que el cambio de variable: $z(t) = \dfrac{1}{x^{n-1}(t)}$ reduce la ecuación a una E.D.O. lineal.

DERIVANDO $$\boxed{z'(t)} = \frac{-(n-1)\, x^{n-2}(t)\, x'(t)}{(x(t))^{2(n-1)}} \underset{\text{USANDO LA ECUACIÓN}}{=}$$

$$= \frac{-(n-1)}{x^n(t)} \left[p(t)x(t) + q(t)x^n(t) \right] =$$

$$= (1-n)\, p(t) \frac{1}{x^{n-1}(t)} + (1-n)\, q(t) = \boxed{(1-n)\, p(t)\, z(t) + (1-n)\, q(t)}$$

ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA EN z.

2.2.- Resuelve la ecuación **logística**:

$$x' = ax - Kx^2 \quad \text{donde} \quad a, K \in \mathbb{R}$$

ESTA E.D.O ES DE BERNOULLI Y EL CAMBIO $z(t) = \dfrac{1}{x(t)}$

DA, $$\boxed{z'(t)} = \frac{-x'(t)}{x^2(t)} = -\frac{[ax - kx^2]}{x^2(t)} = \boxed{-a\, z(t) + k}$$

E.D.O LINEAL DE 1ª ORDEN NO HOMOGÉNEA

HOMOGÉNEA ASOCIADA $z'(t) = -a\,z(t) \Rightarrow z(t) = M e^{-at}$.

SOLUCIÓN PARTICULAR: $z'(t) = -a\,z(t) + k$

continuación 2_2 PROBAMOS $z \equiv cte$ ASÍ $z(t) = \frac{k}{a}$ ES SOLUCIÓN

SOLUCIÓN GENERAL $z(t) = M e^{-at} + k/a$ $M \in \mathbb{R}$.

LUEGO LA SOLUCIÓN DE LA E.D.O LOGÍSTICA ES

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{Me^{-at} + k/a}} \quad M \in \mathbb{R}.$$

2_3.- Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} t\frac{x'(t)}{x^3(t)} + \frac{1}{x^2(t)} = t \\ x(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ORDENANDO $t\frac{x'(t)}{x^3(t)} + \frac{1}{x^2(t)} = t \iff t\frac{x'(t)}{x^3(t)} = t - \frac{1}{x^2(t)}$

$$\iff \frac{x'(t)}{x^3(t)} = 1 - \frac{1}{t}\frac{1}{x^2(t)}$$

$$\iff x'(t) = x^3(t) - \frac{1}{t}x(t).$$ E.D.O DE BERNOULLI.

EL CAMBIO $z(t) = \frac{1}{x^2(t)}$. NOS LLEVA A.

$$\boxed{z'(t)} = \frac{-2x(t)x'(t)}{x^4(t)} \underset{\text{USANDO LA E.D.O}}{=} -\frac{2}{x^3(t)}\left[x^3(t) - \frac{1}{t}x(t)\right]$$

$$= -2 + \frac{2}{t}\frac{1}{x^2(t)} = \boxed{2/t\; z(t) - 2.}$$ E.D.O LINEAL NO HOMOGÉNEA.

RESOLVEMOS ESTA ECUACIÓN:

HOMOGÉNEA ASOCIADA $z'(t) = 2/t\; z(t)$.

ASÍ $\frac{z'(t)}{z(t)} = 2/t$ INTEGRANDO $\ln|z(t)| = 2\ln|t| + k$

LUEGO $z(t) = k\,t^2$ $k \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN PARTICULAR: USAMOS EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES $y(t) = k(t)\,t^2$.

ASÍ $y'(t) = k'(t)\,t^2 + \cancel{2t\,k(t)} \underset{\text{USANDO LA EDO}}{=} \cancel{2/t\,k(t)\,t^2} - 2 \Rightarrow k'(t) = \frac{-2}{t^2}$

LUEGO $k(t) = \frac{2}{t}$. Y ASÍ $y(t) = 2t$ ES LA SOLUCIÓN PARTICULAR

SOLUCIÓN GENERAL $z(t) = k\,t^2 + 2t$ $k \in \mathbb{R}$.

LUEGO LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O DE BERNOULLI ES $x(t) = \sqrt{\frac{1}{z(t)}} = \sqrt{\frac{1}{kt^2 + 2t}}$ $k \in \mathbb{R}$

AHORA SI $x(1) = \frac{1}{\sqrt{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = 0$ Y $\boxed{x(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}}$ ES LA SOLUCIÓN BUSCADA