ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

OTRAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Vamos a ver tres aplicaciones más de la transformada de Laplace. Primero las enunciamos y después veremos algunos ejemplos. En este curso solo nos interesa la primera de ellas.

- **A:** Solución de **sistemas lineales de E.D.O.** de primer orden (como los que salen en los modelos de circuitos multimalla).
- **B:** Solución de algunos sistemas de E.D.O. de primer orden con **coeficientes no constantes**.
- **C:** Cálculo de integrales.

A: Dada una cantidad finita de funciones (de una variable) incógnitas, una expresión del tipo

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) & + & a_{12}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) & + & a_{22}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) & + & a_{n2}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{nn}x_n(t) \end{array}$$

se conoce como un sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y coeficientes constantes. Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación conseguimos un sistema lineal algebraico en el que las incógnitas son las transformadas de las funciones.

Ejemplo 1.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} y'(x) & = & & -z(x) & + \quad x \\ z'(x) & = & -4y(x) & & \\ y(0)=1 & & z(0)=-1 & & \end{array} \right.$$

Aplicando la transformada de Laplace al sistema, tendremos que

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} sLy(s)-1 & = & & -Lz(s) & + \quad \frac{1}{s^2} \\ sLz(s)+1 & = & -4Ly(s) & & \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} sLy(s) & + & Lz(s) & = & 1+\frac{1}{s^2} \\ 4Ly(s) & + & sLz(s) & = & -1 \end{array} \right.$$

Este último es un sistema algebraico que podemos resolver usando la regla de Cramer.

$$Ly(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{s^2} & 1 \\ -1 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ 4 & s \end{vmatrix}} = \frac{s+\frac{1}{s}+1}{s^2-4} = \frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)}$$

y

$$Lz(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & 1+\frac{1}{s^2} \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ 4 & s \end{vmatrix}} = \frac{-s-4-\frac{4}{s^2}}{s^2-4} = -\frac{s^3+4s^2+4}{s^2(s^2-4)}.$$

Ahora tenemos un problema inverso. Así descomponiendo en fracciones simples

$$Ly(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-2} = \frac{-1/4}{s} + \frac{3/8}{s+2} + \frac{7/8}{s-2}$$

y trás mirar las tablas concluimos que

$$y(x) = -1/4 + 3/8e^{-2x} + 7/8e^{2x}.$$

De la misma forma procedemos con Lz y así

$$Lz(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{3/4}{s+2} + \frac{-7/4}{s-2}$$

y trás mirar las tablas concluimos que

$$z(x) = x + 3/4e^{-2x} - 7/4e^{2x}.$$

Apéndice.

B: En el siguiente ejemplo se ven algunas técnicas interesantes.

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} u''(x) + xu'(x) + u(x) = 0 \\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Este es un ejemplo de una E.D.O. lineal de segundo orden homogénea de **coeficientes no constantes**. Una forma de resolverla es convertirla en un sistema lineal con los cambios $u_1 = u$ y $u_2 = u' = u_1'$. Ahora la ecuación anterior es equivalente al sistema

$$\begin{cases} u_1'(x) & = & & u_2(x) \\ u_2'(x) & = & -u_1(x) & -xu_2(x) \\ u_1(0) = 1 & & u_2(0) = 0 & \end{cases}$$

Podemos o bien resolver la ecuación o bien el sistema. Vamos con la ecuación y para ello aplicaremos la transformada de Laplace.

$$0 = L[u''(x) + xu'(x) + u(x)](s) = L[u''(x)](s) + L[xu'(x)](s) + Lu(s)$$

usando que $Lu''(s) = s^2Lu(s) - su(0) - u'(0)$ y que $L[xu'(x)](s) = -(Lu'(s))'$ tenemos que

$$\begin{aligned} &= s^2Lu(s) - s - (sLu(s) - 1)' + Lu(s) \\ &= s^2Lu(s) - s - Lu(s) - s(Lu(s))' + Lu(s) \\ &= s^2Lu(s) - s - s(Lu(s))'. \end{aligned}$$

Despejando llegamos a una E.D.O. de primer orden

$$(Lu(s))' = sLu(s) - 1.$$

La solución de esta ecuación diferencial, aplicando el método de separación de variables, es

$$Lu(s) = Ke^{\frac{s^2}{2}} + \left(-\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{s^2}{2}}.$$

Observemos que ahora el problema inverso es realmente difícil. Al variar en la ecuación de origen un coeficiente constante por otro variable ya la ecuación diferencial que nos queda es muy complicada de tratar.
C: Veamos con un ejemplo como ciertas integrales se pueden resolver utilizando la transformada de Laplace.

Ejemplo 3. $I(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}dt.$

Para resolver esta integral usaremos la transformada de Laplace. Así

$$L[I(x)](s) = \int_0^\infty e^{-sx}\int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}dtdx$$

usando el Teorema de Fubinni que nos permite intercambiar el orden de integración

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx}\frac{1-\cos xt}{t^2}dxdt = \int_0^\infty \frac{1}{t^2}L[1-\cos xt](s)dt$$

mirando las tablas vemos que

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \frac{1}{t^2}[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+t^2}]dt = \int_0^\infty \frac{1}{s(s^2+t^2)}dt \\ &= \frac{1}{s^2}\left[\arctan\frac{t}{s}\right|\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix} = \frac{\pi}{2s^2}. \end{aligned}$$

Como $LI(s) = \frac{\pi}{2s^2}$, las tablas nos dicen que $I(x) = \frac{\pi}{2}x$.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es