ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

DIAGRAMAS DE FASES DE SISTEMAS LINEALES PLANOS. INTRODUCCIÓN.

Vamos a considerar sistemas de E.D.O. lineales planos de coeficientes constantes:

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & ax & + & by \\ y' & = & cx & + & dy \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sabemos que las soluciones del sistema dependen de los autovalores de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Además, sabemos que estas soluciones están relacionadas con las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}' = J \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix},$$

donde J es la **Matriz de Jordan semejante** a la matriz A. Así, por un lado, existe una matriz regular Q, **matriz de paso**, de modo que

$$A = QJQ^{-1}.$$

Por otro lado, sabemos que las soluciones del sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Qe^{Jt}c = Q \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad c \in \mathbb{R}^2,$$

y donde $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ son las soluciones de $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}' = J \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$.

El camino que vamos a seguir ahora es claro:

- Estudiar los diagramas de fases de los sistemas $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}' = J \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$, donde J es una matriz de Jordan 2×2. Este estudio será exahustivo.
- Estudiar los diagramas de fases de los sistemas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, transformando los obtenidos para la matriz de Jordan (semejante a A); tranformándolos a través de la matriz de paso Q.

Matrices de Jordan 2×2.

En dimensión 2, las posibles posibles matrices de Jordan que podemos encontrar son:

- $$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

  con los siguientes casos

  $$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 & \begin{cases} sig\lambda_1 & = & sig\lambda_2 & > 0 \\ sig\lambda_1 & = & sig\lambda_2 & < 0 \\ sig\lambda_1 & \neq & sig\lambda_2 & \\ \lambda_1 & = & 0 & \end{cases} \\ \lambda_1 = \lambda_2 & \begin{cases} \lambda_1 & < & 0 \\ \lambda_1 & > & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \end{cases} \end{cases}.$$

- $$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

  con los siguientes casos

  $$\begin{cases} \lambda_1 & < & 0 \\ \lambda_1 & > & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \end{cases}.$$

- Raíces complejas conjugadas:

  $$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad \beta \neq 0,$$

  con los siguiente casos

  $$\begin{cases} \alpha & < & 0 \\ \alpha & > & 0 \\ \alpha & = & 0 \end{cases}.$$

Vamos a **dibujar los diagramas de fases** de todos estos casos en las lecciones siguientes. A la vez, veremos como las **matrices de pasos deforman** los diagramas de fases.

Deformaciones por matrices de paso.

En la Hoja IV de problemas se proponía el siguiente ejercicio:

Proposición 1. *Se considera el sistema:*

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & ax & + & by \\ y' & = & cx & + & dy \end{array}$$

Sea Q un cambio lineal de coordenadas del plano real. Demuestra que dicho cambio conserva las siguientes propiedades de las trayectorias:
a) Acotación y no acotación.
b) Convergencia hacia el origen cuando $t \to \infty$.
c) $\{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ es una recta del plano.

d) Existencia o no del límite $\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$, *incluyendo los límites infinitos.*

e) Existencia o no del límite $\lim_{t\to\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)}$, *incluyendo los límites infinitos.*

g) Ser cónica cerrada con centro en el origen.

Demostración: **Ejercicio.** Como indicación, solo vemos el apartado e) en las circunstancias que nos interesan.

Sea $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ solución del sistema con matriz de Jordan J y sea la matriz de paso Q

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que las soluciones del sistema de matriz A (semejante a J) vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\begin{array}{rcccc} x'(t) & = & q_1\overline{x}\,'(t) & + & q_2\overline{y}\,'(t) \\ y'(t) & = & q_3\overline{x}\,'(t) & + & q_4\overline{y}\,'(t). \end{array}$$

Luego las pendientes de las tangentes a las trayectorias del sistema en A vienen dadas por

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{q_3\overline{x}\,'(t) + q_4\overline{y}\,'(t)}{q_1\overline{x}\,'(t) + q_2\overline{y}\,'(t)}$$

y dividiendo por $\overline{x}\,'(t)$

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{q_3 + q_4\frac{\overline{y}\,'(t)}{\overline{x}\,'(t)}}{q_1 + q_2\frac{\overline{y}\,'(t)}{\overline{x}\,'(t)}} =$$

o también

$$\frac{1}{\frac{q_1}{q_3} + \frac{q_2}{q_3}\frac{\overline{y}\,'(t)}{\overline{x}\,'(t)}} + \frac{1}{\frac{q_1}{q_4}\frac{\overline{x}\,'(t)}{\overline{y}\,'(t)} + \frac{q_2}{q_4}}.$$

Observemos que si $\lim_{t\to r} \frac{\overline{y}\,'(t)}{\overline{x}\,'(t)} = l$, donde $l \in \mathbb{R}$ o $l = \pm\infty$, entonces

$$\lim_{t\to r} \frac{y'(t)}{x'(t)} = m = \frac{q_3 + q_4 l}{q_1 + q_2 l} \quad \text{o} \qquad \frac{q_4}{q_2}$$

respectivamente $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`