

ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

AUTOVALORES REALES Y DISTINTOS.

Vamos a dibujar los diagramas de fases de los sistemas de E.D.O. lineales planos de la forma:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \lambda_1 x \\ y' & = & \lambda_2 y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para ello tendremos en cuenta las propiedades generales que verifican las trayectorias de un sistema autónomo (que vimos dos lecciones atrás):

- las trayectorias no se cortan;
- las trayectorias son curvas simples o periódicas (esto último solo es posible si hay autovalores complejos);
- o también pueden ser puntos de equilibrio.

Todas las soluciones de este tipo de sistemas son de la forma:

$$(x(t), y(t)) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}), \quad \text{para} \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2,$$

de modo que el dominio de las soluciones es todo $\mathbb{R}$ y $(x(0), y(0)) = (c_1, c_2)$.

Las propiedades de estas soluciones dependen del signo de los autovalores λ_1 y λ_2 . Vemos ahora los distintos casos.

$$\boxed{\lambda_1, \lambda_2 > 0}$$

Puntos de equilibrio: El único punto de equilibrio, solución del sistema escalar
$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \lambda_1 x \\ 0 & = & \lambda_2 y \end{array},$$
 es el $(0, 0)$. Luego la solución constante $(x, y) = (0, 0)$ nos da un punto de equilibrio.

Autovalores y autovectores: En este caso con una matriz diagonal es claro que para:

- para λ_1 , el vector $(1, 0)$ es un autovector y por tanto

$$(x, y) = e^{\lambda_1 t} (1, 0) \quad (1)$$

es una solución del sistema;

- para λ_1 , el vector $-(1, 0)$ es un autovector y por tanto

$$(x, y) = e^{\lambda_1 t} (-1, 0) \quad (2)$$

es una solución del sistema;

- para λ_2 , el vector $(0, 1)$ es un autovector y por tanto

$$(x, y) = e^{\lambda_2 t}(0, 1) \quad (3)$$

es una solución del sistema;

- para λ_2 , el vector $-(0, 1)$ es un autovector y por tanto

$$(x, y) = e^{\lambda_2 t}(0, -1) \quad (4)$$

es una solución del sistema.

Las trayectorias de estas soluciones son los semiejes coordenados, mira la siguiente figura.

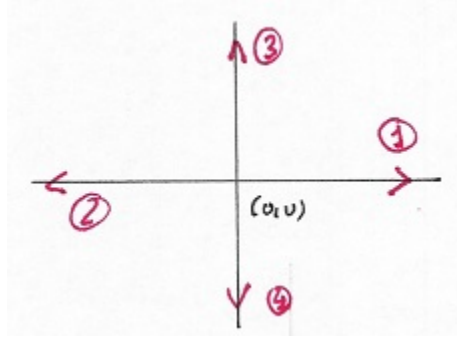


FIGURA 1. Trayectorias sobre los ejes.

Observemos que, dado que **las trayectorias no se cortan**, cada trayectoria del diagrama de fases permanece en un único cuadrante. Es decir, si una solución (x, y) verifica que $(x(0), y(0)) = (c_1, c_2)$ y el punto (c_1, c_2) está, por ejemplo, en el tercer cuadrante, entonces toda la trayectoria está dentro de ese cuadrante.

Límites: Ahora calculamos los límites de las soluciones cuando t tiende a $\pm\infty$.

1. $\lim_{t \rightarrow -\infty} (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}) = (0, 0)$, dado que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Lo que quiere decir que las **trayectorias salen del origen** $(0, 0)$.

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}) = (\text{sig} c_1 \infty, \text{sig} c_2 \infty)$, dado que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Lo que quiere decir que las **trayectorias no están acotadas ni en x ni en y** .

Derivadas: Las trayectorias, vistas como gráficas, es decir como funciones de y con respecto a la variable x , tiene por derivadas (pendientes de las rectas tangentes) a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

Nos interesa conocer con que tangentes salen las trayectorias de $(0, 0)$. Si la trayectorias son concavas o convexas. Para ello calculamos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_2 > \lambda_1 & (1) \\ \pm \infty & \text{si } \lambda_2 < \lambda_1 & (2) \end{cases}.$$

Esto nos dice que en el caso (1) las trayectorias salen del origen con **pendiente nula** y en el caso (2) con **pendiente vertical**.

Por otro lado, tomando límites en infinito, se invierten la tendencias de las tangentes. Si salen las trayectorias de cero con pendiente nula, después continuan aumentando la pendiente. Si salen verticales de cero, después tienden a cero.

- Si $\lambda_2 > \lambda_1$ (1), entonces en el primer cuadrante $\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ crece (la derivada de y con respecto a x cuando x también crece) y por tanto la trayectoria es **convexa**.
- Si $\lambda_2 < \lambda_1$ (2), entonces en el primer cuadrante $\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ decrece y por tanto la trayectoria es **concava**.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, ya estamos en condiciones de pintar los diagramas de fases correspondientes.

Caso $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ (1)

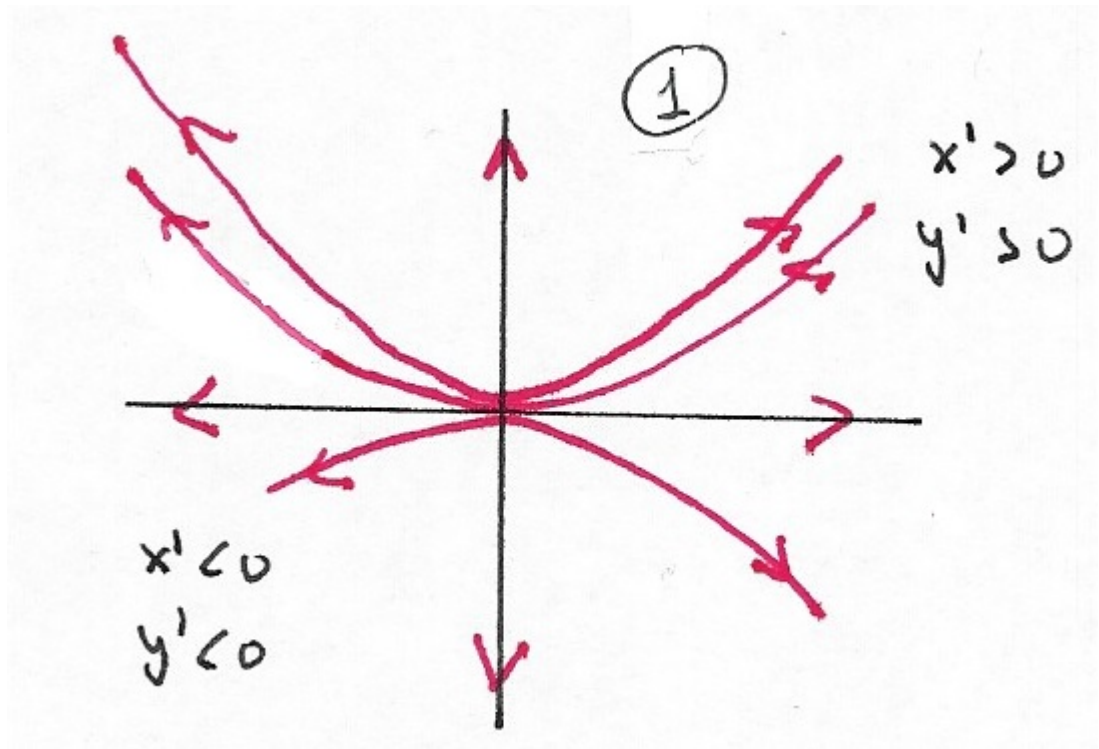


FIGURA 2. Diagrama de fases: $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

Caso $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ (2)

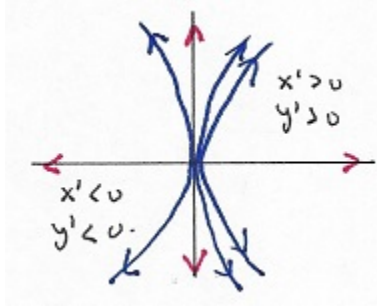


FIGURA 3. Diagrama de fases: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Observemos que las trayectorias se alejan todas del origen. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 1. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x \\ y' &= \lambda_2 y \end{aligned}$$

con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, se dice que el **punto de equilibrio** $(0, 0)$ es un **nodo inestable, fuente o surtidor**.

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de la matriz A sean $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

$$\boxed{\lambda_1, \lambda_2 < 0}$$

Se procede de forma análoga al caso anterior con los cambios evidentes.

Puntos de equilibrio: El único punto de equilibrio, solución del sistema escalar $\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 x \\ 0 &= \lambda_2 y \end{aligned}$, es el $(0, 0)$. Luego la solución constante $(x, y) = (0, 0)$ nos da un punto de equilibrio.

Autovalores y autovectores: En este caso con una matriz diagonal es claro que:

$(x, y) = e^{\lambda_1 t}(1, 0)$, $(x, y) = e^{\lambda_1 t}(-1, 0)$, $(x, y) = e^{\lambda_2 t}(0, 1)$ y $(x, y) = e^{\lambda_2 t}(0, -1)$ son soluciones del sistema cuyas trayectorias caen sobre los semiejes coordenados.

Observemos que, dado que **las trayectorias no se cortan**, cada trayectoria del diagrama de fases permanece en un único cuadrante. Es decir, si una solución (x, y) verifica que $(x(0), y(0)) = (c_1, c_2)$ y el punto (c_1, c_2) está, por ejemplo, en el tercer cuadrante, entonces toda la trayectoria está dentro de ese cuadrante.

Límites: Ahora calculamos los límites de las soluciones cuando t tiende a $\pm\infty$.

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}) = (0, 0)$, dado que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Lo que quiera decir que las **trayectorias entran al origen** $(0, 0)$.

2. $\lim_{t \rightarrow -\infty} (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}) = (\text{sig} c_1 \infty, \text{sig} c_2 \infty)$, dado que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Lo que quiera decir que las **trayectorias vienen del infinito**.

Derivadas: Las trayectorias, vistas como gráficas, es decir como funciones de y con respecto a la variable x , tiene por derivadas (pendientes de las rectas tangentes) a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

Nos interesa conocer con que tangentes entran las trayectorias a $(0, 0)$. Si la trayectorias son concavas o convexas. Para ello calculamos:

■

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = \begin{cases} \pm \infty & \text{si } \lambda_1 < \lambda_2 < 0 & (1) \\ 0 & \text{si } \lambda_2 < \lambda_1 & (2) \end{cases}.$$

Esto nos dice que en el caso (2) las trayectorias entran al origen con **pendiente nula** y en el caso (1) con **pendiente vertical**.

Por otro lado, tomando límites en menos infinito, se invierten la tendencias de las tangentes. Si entran las trayectorias a cero con pendiente nula, vienen disminuyendo su pendiente. Si entran verticales a cero, es que vienen desde pendientes cercanas a cero.

- Si $\lambda_2 > \lambda_1$ (1), entonces en el primer cuadrante $\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ decrece (cuando t se hace pequeña y por tanto la x cree) y por tanto la trayectoria es **concava**.
- Si $\lambda_2 < \lambda_1$ (2), entonces en el primer cuadrante $\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ crece (cuando t se hace pequeña y por tanto la x cree) y por tanto la trayectoria es **convexa**.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, ya estamos en condiciones de pintar los diagramas de fases correspondientes.

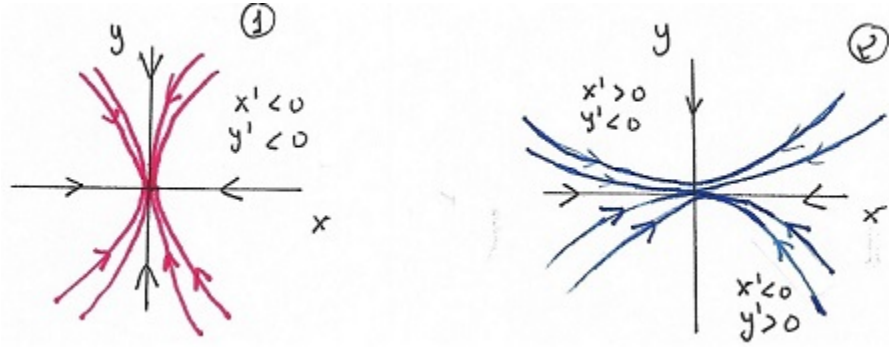


FIGURA 4. Caso $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (1) y caso $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (2) .

Observemos que las trayectorias se acercan todas al origen. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 2. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x \\ y' &= \lambda_2 y \end{aligned}$$

con $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, se dice que el **punto de equilibrio** $(0,0)$ es un **nodo estable** o **sumidero**.

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de la matriz A sean $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Autovalores reales de distinto signo.

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad (3)$$

Puntos de equilibrio: El único punto de equilibrio, solución del sistema escalar $\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 x \\ 0 &= \lambda_2 y \end{aligned}$, es el $(0,0)$. Luego la solución constante $(x,y) = (0,0)$ nos da un punto de equilibrio.

Autovalores y autovectores: En este caso con una matriz diagonal es claro que:

$(x,y) = e^{\lambda_1 t}(1,0)$, $(x,y) = e^{\lambda_1 t}(-1,0)$, $(x,y) = e^{\lambda_2 t}(0,1)$ y $(x,y) = e^{\lambda_2 t}(0,-1)$ son soluciones del sistema cuyas trayectorias caen sobre los semiejes coordenados.

Observemos que, dado que **las trayectorias no se cortan**, cada trayectoria del diagrama de fases permanece en un único cuadrante. Es decir, si una solución (x,y) verifica que $(x(0), y(0)) = (c_1, c_2)$ y el punto (c_1, c_2) está, por ejemplo, en el tercer cuadrante, entonces toda la trayectoria está dentro de ese cuadrante.

Límites: Ahora calculamos los límites de las soluciones cuando t tiende a $\pm\infty$.

$$1. \lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}) = (0, \text{sig} c_2 \infty).$$

Lo que quiere decir que las **trayectorias** tienen una **asíntota vertical** en $x = 0$.

$$2. \lim_{t \rightarrow -\infty} (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}) = (\text{sig} c_1 \infty, 0).$$

Lo que quiere decir que las **trayectorias** tienen una **asíntota horizontal** en $y = 0$.

Derivadas: Las trayectorias, vistas como gráficas, es decir como funciones de y con respecto a la variable x , tiene por derivadas (pendientes de las rectas tangentes) a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

En este caso, como las trayectorias tienen asíntotas, parece claro que las pendientes de las trayectorias tienden a la pendiente de las asíntotas. Esto lo vemos tomando límites.

■

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = -\text{sig}(c_1 c_2) \infty \quad (3)$$

- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (3), entonces en el primer cuadrante $\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ decrece (cuando t se hace grande y por tanto la x decrece) y por tanto la trayectoria es **convexa**.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, ya estamos en condiciones de pintar los diagramas de fases correspondientes.

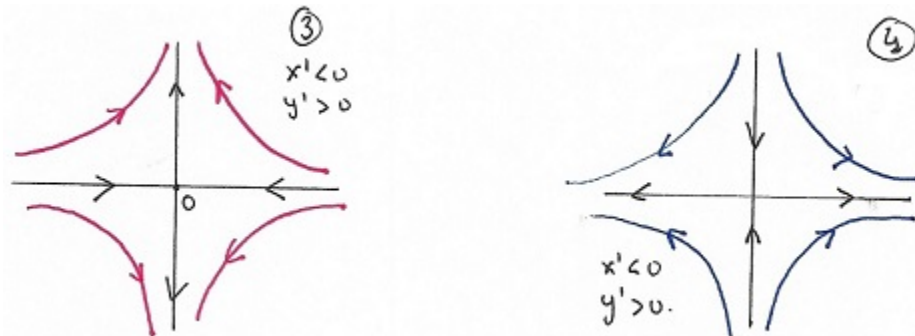


FIGURA 5. **Caso** $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (3). y **Caso** $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ (4).

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \quad (4)$$

Ejercicio. Comprueba que en este caso el diagrama de fase queda como indica la figura de arriba.

Observemos que las trayectorias se acercan para luego alejarse del punto de equilibrio $(0,0)$. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 3. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x \\ y' &= \lambda_2 y \end{aligned}$$

con $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, se dice que el **punto de equilibrio** $(0,0)$ es un **punto de silla**.

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de la matriz A tenga signos distintos: $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Algún autovalor nulo.

$$\lambda_1 = 0$$

En este caso, tenemos el sistema $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = \lambda_2 y \end{cases}$. Las soluciones de este sistema vienen dadas por:

$$(x(t), y(t)) = c_1(1, 0) + c_2 e^{\lambda_2 t}(0, 1).$$

Claramente todas las **trayectorias son semirectas verticales**.

Puntos de equilibrio. Todos los punto de la forma $(x_0, 0)$ son puntos de equilibrio.

Según el signo de λ_2 , al calcular los límites correspondientes, los diagramas de fases que tenemos son:

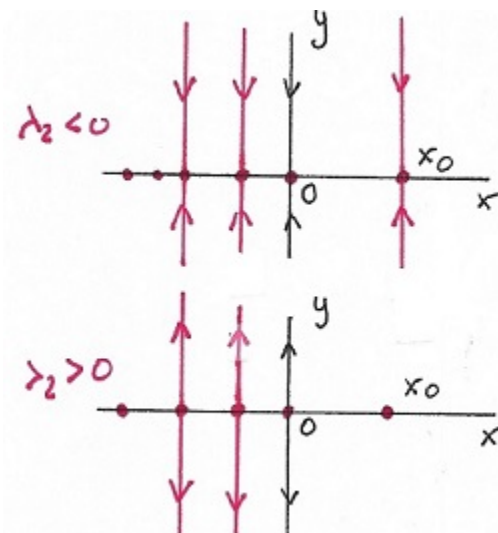
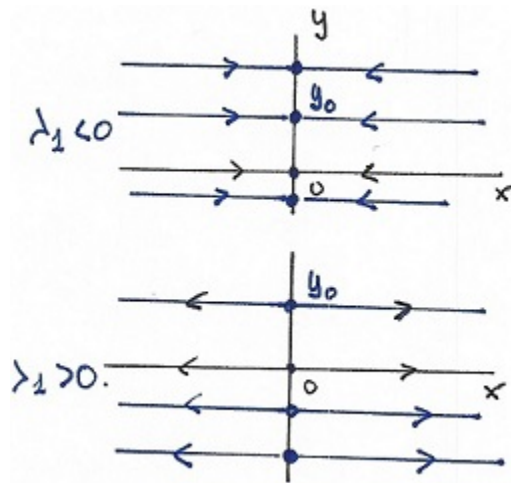


FIGURA 6. Caso $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$. y Caso $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$.

$$\lambda_2 = 0$$

Ejercicio. De forma análoga al caso anterior, determina que a este caso le corresponde los siguientes diagramas de fase.

FIGURA 7. Caso $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$. y Caso $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$.

Sistemas con autovalores reales y distintos.

Consideramos el problema

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

cuya matriz A de coeficientes tiene como autovalores λ_1, λ_2 reales y distintos. Si $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ es la matriz de Jordan semejante a A , ya sabemos resolver el problema $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}' = J \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$. También sabemos que hay una **matriz de paso**

$$Q = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix},$$

cuyas columnas $v_1 = (q_1, q_3)$ y $v_2 = (q_2, q_4)$ son los autovectores asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente; entonces las soluciones del problemas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Es decir las soluciones de nuestro sistema son:

$$(x(t), y(t)) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

Para representar el **diagrama de fases** de nuestro problema en A , solo hay que representar las curvas paramétricas solución en el plano. También podemos usar que las soluciones del problema en A son las soluciones del problema en J transformadas por la matriz de paso Q . Así teniendo en cuenta la Proposición 1. de la lección anterior sabemos que:

- los **puntos de equilibrio** del sistema ($0 = Ax_0$) son los puntos de equilibrio (y_0) del sistema en J transformados por Q ,

$$x_0 = Qy_0.$$

- Las trayectorías sobre los **semiejes de los ejes coordenados** en J , se transforman en trayectorias sobre los semiejes de la **rectas vectoriales de direcciones v_1 y v_2** .

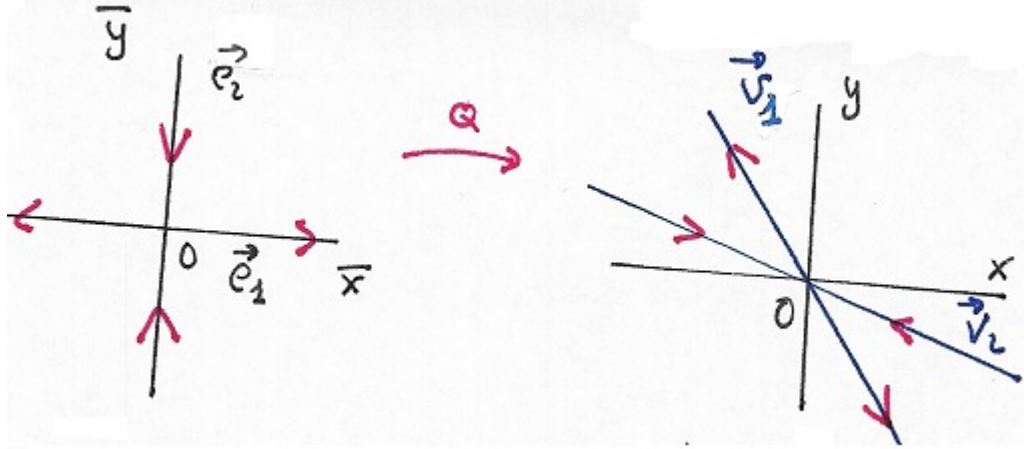


FIGURA 8. Transformación de los Ejes.

- Los **límites**, cuando $t \rightarrow \pm\infty$, **a cero o infinito se conservan** y como

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{\frac{q_1}{q_3} + \frac{q_2}{q_3} \frac{\bar{y}'(t)}{\bar{x}'(t)}} + \frac{1}{\frac{q_1}{q_4} \frac{\bar{x}'(t)}{\bar{y}'(t)} + \frac{q_2}{q_4}},$$

las **trayectorias entran o salen de cero** con **pendientes $\frac{q_3}{q_1}$ o $\frac{q_4}{q_2}$** (las pendientes de v_1 y v_2 respectivamente) y en el infinito las pendientes se tornan y tienden a $\frac{q_4}{q_2}$ o $\frac{q_3}{q_1}$.

- Regiones de crecimiento.** Las rectas $ax+by=0$ y $cx+dy=0$ dividen el plano en distintas regiones de crecimiento. En el caso J éstas quedan enmascaradas por que coinciden con los cuadrantes del plano.

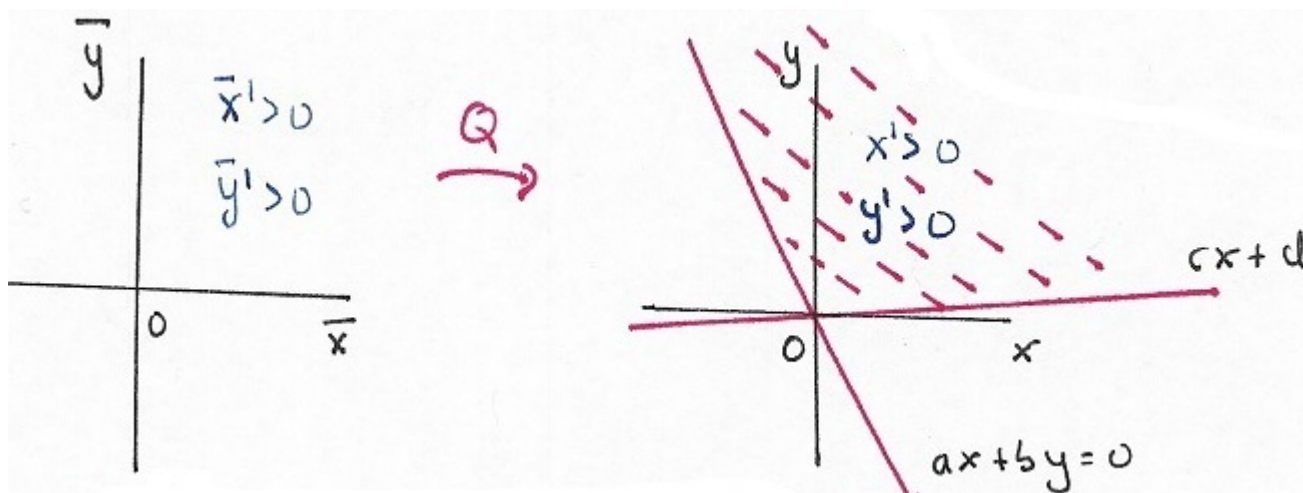


FIGURA 9. Regiones de crecimiento.

Observemos que sobre la recta $cx + dy = 0$ las trayectorias tienen rectas **tangentes horizontales** (ya que $\frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$) y sobre la recta $ax + by = 0$ las trayectorias tienen rectas **tangentes verticales** (ya que $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \pm\infty$)

Así por ejemplo, en la siguiente figura se ve un caso de transformación entre el diagrama de fases en J y el transformado que corresponde a nuestro problema en A .

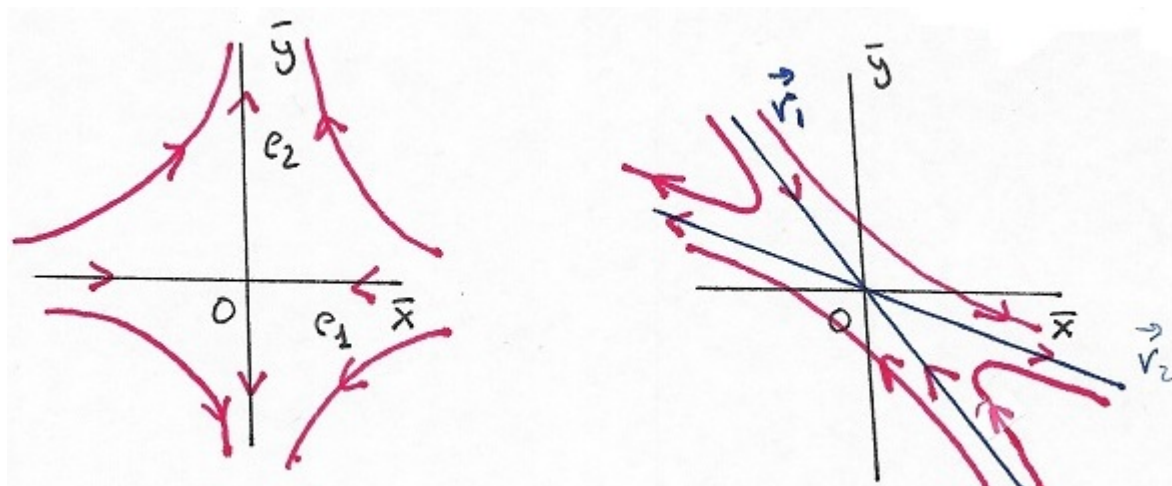


FIGURA 10. Transformación.

Observemos, que en ambos casos, el punto de equilibrio es un **punto de silla**; este ejemplo se corresponde a una matriz A con autovalores reales de distinto signo.

Ejemplo 1. Vamos a dibujar el **diagrama de fases** del sistema

$$\begin{aligned} x' &= -3x - 8y \\ y' &= 4x + 9y \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Puntos de equilibrio. Los puntos de equilibrio del sistema se consiguen resolviendo $0 = A x$. En este caso el único punto de equilibrio es el origen $(0, 0)$.

Autovalores. Los autovalores del sistema se consiguen resolviendo:

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -8 \\ 4 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

Los autovalores son dos números reales positivos $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$. Esto nos dice que el punto de equilibrio es un **nodo inestable**, es decir las trayectorias del sistema nacen del origen, pero se alejan de él. Veámoslo.

Autovectores. Trayectorias rectas. .- Para $\lambda_1 = 1$, resolvemos $-4x - 8y = 0$ y nos sale un autovector $v_1 = (2, -1)$.

.- Para $\lambda_2 = 5$, resolvemos $-8x - 8y = 0$ y nos sale un autovector $v_2 = (1, -1)$.

Matriz de paso. Esta matriz es $Q = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluciones del sistema. Por tanto las soluciones del sistema son:

$$(x(t), y(t)) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^{5t} v_2 \quad \text{para} \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

El **diagrama de fases** que tenemos que pintar se corresponde a pintar las trayectorias anteriores.

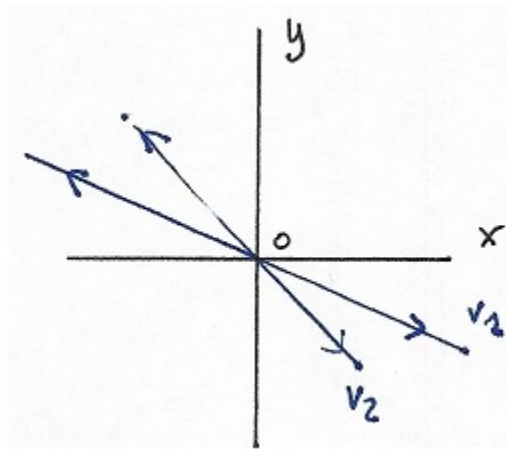


FIGURA 11. Trayectorias rectas: $e^t v_1$ y $e^{5t} v_2$.

Límites. Ahora calculamos los límites de las soluciones cuando t tiende a $\pm\infty$.

$$1. \lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 e^t v_1 + c_2 e^{5t} v_2 = (0, 0).$$

Lo que quiere decir que las **trayectorias salen del origen** $(0, 0)$.

$$2. \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 e^t v_1 + c_2 e^{5t} v_2 = (\pm\infty, \pm\infty).$$

Lo que quiere decir que las **trayectorias no están acotadas ni en x ni en y** .

En este caso **no hay asíntotas** ni horizontales ni verticales.

Derivadas: $(x, y)' = c_1 e^t(2, -1) + 5c_2 e^{5t}(1, -1)$ Las trayectorias, vistas como gráficas, es decir como funciones de y con respecto a la variable x , tiene por derivadas (pendientes de las rectas tangentes) a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c_1 e^t - 5c_2 e^{5t}}{2c_1 e^t + 5c_2 e^{5t}} = \frac{-c_1 - 5c_2 e^{4t}}{2c_1 + 5c_2 e^{4t}}.$$

Nos interesa conocer con que tangentes salen las trayectorias de $(0, 0)$ y con que pendiente tienden a "infinito". Para ello calculamos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2},$$

lo que quiere decir que entramos a cero con la pendiente de v_1 . Y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1},$$

lo que quiere decir que las pendientes tienden a la pendiente de v_2 en el infinito.

Regiones de crecimiento. La recta $-3x - 8y = 0$ nos da los punto de tangente horizontal y por encima de ella decrecimiento de la x y por debajo crecimiento. La recta $4x + 9y = 0$ nos da los punto de tangente vertical y por encima de ella crecimiento de la y y por debajo decrecimiento.

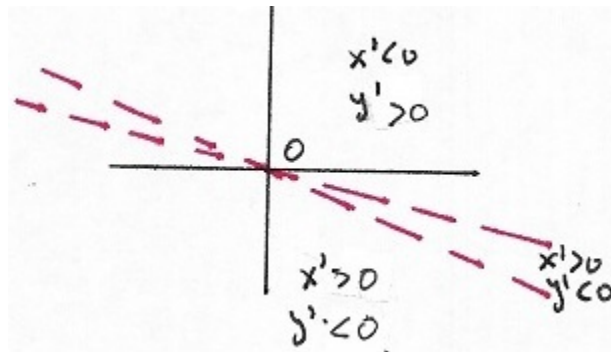


FIGURA 12. Regiones de crecimiento.

Observemos que estas rectas **no coinciden** con las trayectorias sobre v_1 y v_2 . Esta regiones condicionan la forma de la trayectorias. Así las trayectorias entre las trayectorias rectas $e^t v_1$ y $e^{5t} v_2$ son de la forma:

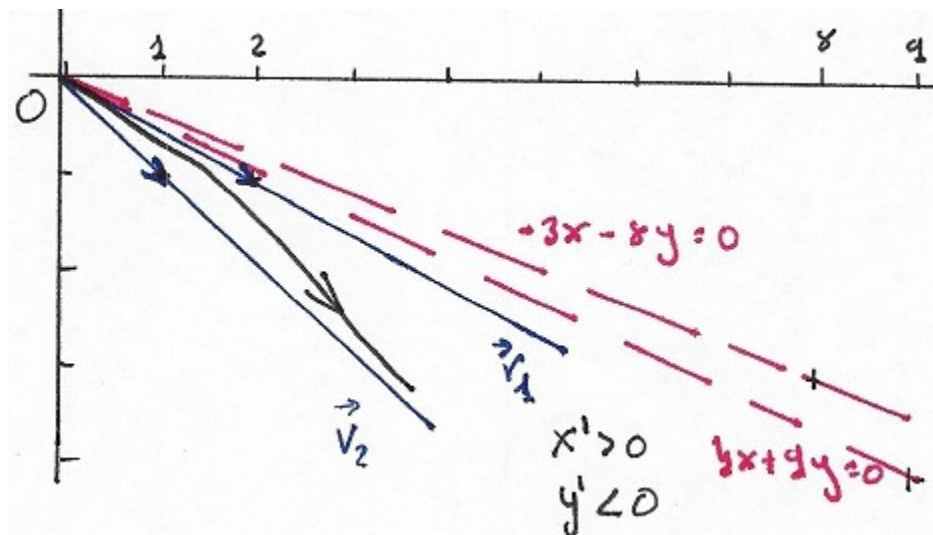


FIGURA 13. Trayectoria entre $e^t v_1$ y $e^{5t} v_2$.

La trayectoria, en negro, sale del origen pegada a v_1 , después su x siempre crece y su y decrece; pegándose en el infinito a v_2 .

Diagrama de fase. Con toda la información, vemos que el diagrama de fases de este sistema es

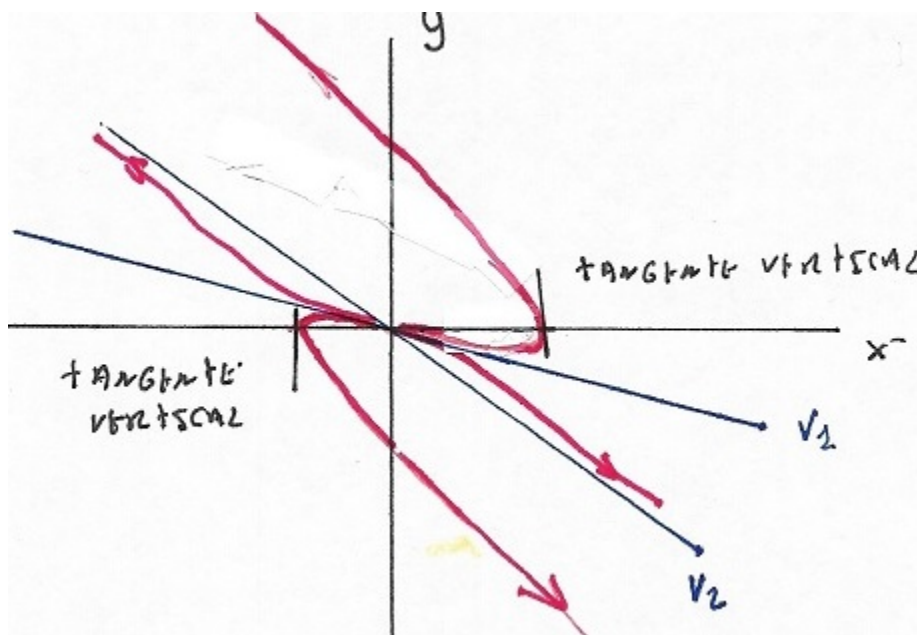


FIGURA 14. Diagrama de fases.

Observemos que las trayectorias entre las trayectorias rectas $e^t v_1$ y $-e^{5t} v_2$, también entre $-e^t v_1$ y $e^{5t} v_2$, se tiene que "doblar" para pasar de un crecimiento de la "x" a un decrecimiento, al contrario en el otro

caso. Se doblan en puntos de tangencia vertical que están sobre la recta $-3x - 8y = 0$ (o lo que es lo mismo donde $x'(t) = 0$) $\square$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es