EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL 2020-2021
Primera Convocatoria (3 de Junio de 2021)

1. Calcula los números complejos tales que $z^3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. Discute el sistema
$$\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + mz = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$
según los valores de m. Para aquel valor o valores de m para los que el sistema sea compatible indeterminado, resuélvelo.

3. Consideramos los vectores $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ y $v_3 = (1, -1, 2)$ de $\mathbb{R}^3$. Demuestra que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula las coordenadas del vector $(-3, 0, 3)$ respecto de B.

4. Sea f una aplicación lineal de un espacio vectorial $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo tal que
$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2,\ f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2,\ f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2,$$
donde $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base V. Calcula la matriz de la aplicación f respecto de la base $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sabiendo que $\vec{v}_1 = -\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$. Calcula una base del núcleo de f respecto de B_2.

5. Halla la matriz de cambio de base de B a B' de $\mathbb{R}^2$, donde
$$B = \{(-3, 1), (-5, -1)\} \quad \text{y} \quad B' = \{(2, 1), (1, 1)\}.$$

6. Dados a, b, c y d números reales *distintos*, explica por qué estas tres matrices tienen el mismo rango. Determina cuál es dicho rango.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3+1 & b^3+1 & c^3+1 & d^3+1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & b & c & d+a \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2+a^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3+a^3 \end{pmatrix}.$$

7. Halla unas ecuaciones implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(0, 1, 2, 1), (-1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)$. (Es decir, encuentra un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea dicho subespacio vectorial.)

8. Considérese la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
a) Halla los autovalores de A, y decide si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
b) Encuentra, si es posible, una matriz invertible P y una matriz diagonal D, ambas reales, tales que
$$P^{-1}AP = D.$$

ALGEBRA 3-VI-2021

PROBLEMA 1 CALCULA LOS NÚMEROS COMPLEJOS TALES QUE $z^3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ EN FORMA POLAR

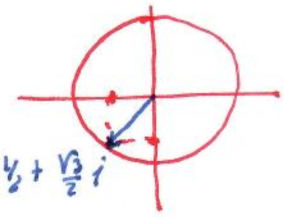
Y $z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

LUEGO $|z|^3 = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

POR OTRO LADO $3\theta = \operatorname{Arctn} \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \operatorname{Arctn}\sqrt{3} + \pi + 2k\pi$

$k = 0, 1, 2$

OBSERVEMOS QUE



$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\operatorname{Arg}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) = \operatorname{Arctn}\sqrt{3} + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

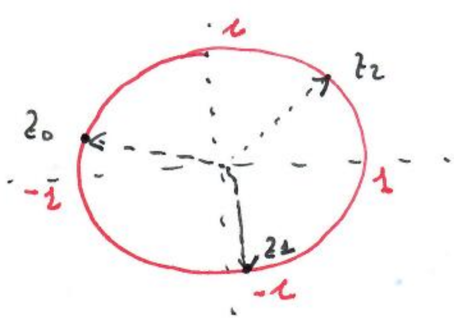
LUEGO z PUEDEN SER

PARA $k=0$ $\quad z_0 = \cos\frac{4\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}$

PARA $k=1$ $\quad z_1 = \cos(\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3})$

PARA $k=2$ $\quad z_2 = \cos(\frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3})$

DE FORMA GRÁFICA



PROBLEMA 2. DISCUTIR EL SISTEMA
$$\begin{cases} 2x+2y-4z=0 \\ -2y+mz=0 \\ x+2y+4z=0 \end{cases}$$
SEGÚN LOS VALORES DE m. PARA AQUEL VALOR O VALORES DE m PARA LOS QUE EL SISTEMA SEA COMPATIBLE INDETERMINADO, RESUÉLVELO.

EL SISTEMA ES HOMOGÉNEO POR TANTO SIEMPRE ES COMPATIBLE.

REORDENANDO LAS ECUACIONES:
$$\begin{aligned} x+2y+4z&=0 \\ 2x+2y-4z&=0 \\ -2y+mz&=0 \end{aligned}$$

USANDO GAUSS, SI HACEMOS $E_2 - 2E_1$ TENEMOS
$$\begin{aligned} x+2y+4z&=0 \\ -2y-12z&=0 \\ -2y+mz&=0 \end{aligned}$$

SI HACEMOS $E_3 - E_2$ TENEMOS
$$\begin{aligned} x+2y+4z&=0 \\ -2y-12z&=0 \\ (m+12)z&=0 \end{aligned}$$

SI $m \neq 12$ EL SISTEMA TIENE SOLUCIÓN ÚNICA IGUAL A $x=0$, $y=0$ Y $z=0$

$\boxed{\text{SI } m = 12}$ TENEMOS EL SISTEMA EQUIVALENTE
$$\begin{aligned} x+2y+4z&=0 \\ -2y-12z&=0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x+2y&=-4z \\ -2y&=12z \\ z&=z \end{aligned}$$

LUEGO
$$\begin{aligned} x+2y&=-4z \\ y&=-6z \\ z&=z \end{aligned}$$
ASÍ $x=-2(-6z)-4z=8z$

Y NOS QUEDA
$$\begin{aligned} x&=8z \\ y&=-6z \\ z&=z \end{aligned}$$
SOLUCIÓN EN PARAMÉTRICAS

O $(x,y,z) \in L\{(8,-6,1)\}$

PROBLEMA 3:] Consideramos los vectores $v_1=(1,2,-1)$, $v_2=(2,1,-1)$ y $v_3=(1,-1,2)$ de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que $B=\{v_1\, v_2\, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $(-3,0,3)$ respecto de B.

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, por el teorema de la base sólo necesitamos ver que v_1 y v_2 y v_3 son linealmente independientes. Para ver esto resolvemos el sistema $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \iff$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{como } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+F_1}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Luego el sistema tiene solución única $(0,0,0)$. Lo que prueba que son independientes.

Para calcular las coordenadas de $(-3,0,3)$ resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$ usando Cramer

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-6-6\cancel{-3}\cancel{+3}}{-6} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3+6+3+12}{-6} = -3$$

$$\lambda_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{3+6-3-12}{-6} = 1$$

Comprobación $2(1,2,-1) - 3(2,1,-1) + (1,-1,2) = (-3,0,3)$.
$= (2-6+1,\ 4-3-1,\ -2+3+2) = (-3,0,3)$.

PROBLEMA 4: Sea f una aplicación lineal de un espacio vectorial $(V,+\cdot,\mathbb{R})$ en sí mismo tal que

$$f(\vec{u}_1)=\vec{u}_2 \quad f(u_2)=u_1+u_2 \ , \quad f(u_3)=u_1+u_2$$

donde $B_1=\{u_1\, u_2\, u_3\}$ es una base de V. Calcula la matriz de la aplicación f respecto de la base $B_2=\{v_1\, v_2\, v_3\}$ sabiendo que $v_1=-u_2+u_3$, $v_2=u_2$, $v_3=u_1+2u_2$. Calcula una base del núcleo de f respecto B_2.

$$f\quad (V\ B_1) \longrightarrow (V,B_1)$$

$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix}$$

Ahora el cambio de base de coordenadas de B_2 $\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}$ a coordenadas en B_1 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ viene dado por la matriz de paso Q

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}\bar{\eta}_1\\\bar{\eta}_2\\\bar{\eta}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}Q\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}$; así la matriz de f respecto de B_2 es $Q^{-1}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}Q$

Calculamos Q^{-1} por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\-1&1&2&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{F_1\leftrightarrow F_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\-1&1&2&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\underset{F_2+F_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&2&0&1&1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\underset{F_2-2F_3}{\sim}\left(\begin{array}{c|ccc}I&0&0&1\\&-2&1&1\\&1&0&0\end{array}\right)$$

Así $\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&2\end{pmatrix}}$

Matriz de f en la base B_2

$$\ker f=\left\{(\bar{x},\bar{y},\bar{z}):\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}=0\right\} \iff \begin{matrix}-\bar{y}-\bar{z}=0\\ \bar{y}+2\bar{z}=0\end{matrix} \iff \bar{y}=\bar{z}=0$$

Luego $\ker f=\{(\bar{x},0,0):\bar{x}\in\mathbb{R}\}=L[(1,0,0)]=L[v_1]$

PROBLEMA 5: Halla la matriz de cambio de base de B a B' de $\mathbb{R}^2$ donde:

$B = \{(-3,1),(-5,-1)\}$ y $B' = \{(2,1),(1,1)\}$

•) $(-3,1) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (1,1) \iff \begin{cases} -3 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$

Luego $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$ $\quad \boxed{-3 = 2(1-\lambda_2) + \lambda_2 = 2 - \lambda_2}$

Así $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_1 = -4$

••) $(-5,-1) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (1,1) \iff \begin{cases} -5 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ -1 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$

Luego $\lambda_1 = -1 - \lambda_2$ $\quad \boxed{-5 = 2(-1-\lambda_2) + \lambda_2 = -2 - \lambda_2}$

Así $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_1 = -4$

y la matriz de base buscada es $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 6: Dados a, b, c y d números reales distintos explica por qué estas tres matrices tienen el mismo rango. Determina dicho rango.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3+1 & b^3+1 & c^3+1 & d^3+1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & b & c & d+a \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2+a^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3+a^3 \end{pmatrix}$$

M_2 es M_1 donde a la 4 fila le hemos sumado la fila 1

M_3 es M_1 donde a la 4 columna le hemos sumado la primera columna, ambas operaciones no cambian el rango de una matriz, por ello las tres matrices tienen el mismo rango

$$\text{Rang } M_1 = 4, \text{ ya que } \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}}_{\text{determinante de Vandermonde}} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot(d-c) \underbrace{\neq 0}_{a,b,c,d \text{ distintos}}$$

PROBLEMA 7: HALLA UNAS ECUACIONES IMPLÍCITAS DEL SUBESPACIO VECTORIAL DE $\mathbb{R}^4$ GENERADO POR LOS VECTORES $(0,1,2,1)$ $(-1,0,1,1)$ y $(0,1,0,0)$

$$S = \mathcal{L}\left[(0,1,2,1),\ (-1,0,1,1),\ (0,1,0,0)\right]$$

EL RANGO DE $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ES 3 YA QUE $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

LUEGO SI $(x,y,z,w) \in S$,

$$0 = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 0 \\ y & 1 & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 & 0 \\ w & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{DESARROLLANDO} \\ \text{POR LA 4 COLUMNA}}}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ z & 2 & 1 \\ w & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - z + 2w - x = x - z + 2w$$

LAS ECUACIONES BUSCADAS SON $\boxed{x - z + 2w = 0}$

PROBLEMA 8: SEA $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) HALLA LOS AUTOVALORES DE A Y DECIDE SI ES DIAGONALIZABLE SOBRE $\mathbb{R}$

b) ENCONTRAR, SI ES POSIBLE, UNA MATRIZ INVERTIBLE P Y UNA MATRIZ DIAGONAL D, AMBAS REALES, TALES QUE $P^{-1}AP = D$

a) AUTOVALORES; ECUACIÓN CARACTERÍSTICA $0 = |A - \lambda I|$

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{DESARROLLO} \\ \text{ÚLTIMA FILA}}}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) = -(2-\lambda)^2(\lambda+2)$$

LUEGO $\lambda = 2$ ES UN AUTOVALOR DOBLE
Y $\lambda = -2$ ES UN AUTOVALOR SENCILLO

CALCULAMOS LOS AUTOVECTORES ASOCIADOS.

PARA $\lambda = -2$ $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - 2z \\ 2x + 2y + 2z \\ 4z = 0 \end{array} \right.$ $\iff$ $v_1 = (1,-1,0)$ ES UN AUTOVECTOR.

PARA $\lambda = 2$ $\left\{ \begin{array}{l} -2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{array} \right.$ $\Longleftrightarrow$ $-x + y - z = 0$

LUEGO $v_2 = (1, 0, -1)$ Y $v_3 = (0, 1, 1)$ SON AUTOVECTORES INDEPENDIENTES ASOCIADOS,

LUEGO LA MATRIZ ES DIAGONALIZABLE,

Y SABEMOS QUE

$$A = Q D Q^{-1} \quad \text{DONDE} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y DONDE Q ES LA MATRIZ DE PASO

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ASÍ $D = Q^{-1} A Q$

CALCULEMOS POR GAUSS-JORDAN LA MATRIZ INVERSA

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2+F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3/2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2-F_3 \\ F_1-F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{c|ccc} & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ I & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

ASÍ

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{=}$$

COMPROBACIÓN

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$