

EXAMEN Elem. de E.D.O. 18 de Junio 2021.

Nombre y apellidos:.....

1.- (1 puntos) Dada la ecuación $x'(t) = -3x(t) + x^2(t) - 4$,

a) Calcula una solución particular $x_1(t)$.

b) Con el cambio de variable $z(t) = \frac{1}{x(t) - x_1(t)}$, encuentra la solución general del problema.

2.- (1 puntos) Se considera la E.D.O.

$$x^{IV}(t) + 3x'''(t) + 7x'(t) + x(t) = 0.$$

Suponiendo que tenemos un Teorema de Existencia y Unicidad para la E.D.O. (es decir, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ y para todo $a = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, existe una única solución tal que $x^k(t_0) = x_k$ para $k = 0, 1, 2, 3$), prueba que el conjunto de soluciones de la E.D.O. es un espacio vectorial de dimensión 4.

3.- (1 puntos) Dado el problema

$$\begin{cases} x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t) \\ x(0) = K_1, \quad x'(0) = K_2, \end{cases}$$

encuentra $a, b, K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ y $f(t)$ para que la función

$$x(t) = 3e^{-t} + e^{2t} + \sin t$$

sea la solución del problema.

4.- (1 puntos) Sea $x' = Ax$ con $A \in M_{27 \times 27}(\mathbb{R})$. Se sabe que los autovalores distintos de la matriz A son $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3 + i, \lambda_3 = 3 - i$, y $\lambda_4 = -8$.

a) Encuentra una solución $x(t)$ del sistema de modo que $\|x(t)\|_2 \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) ¿Existe alguna solución acotada distinta del punto de equilibrio? Justifica tu respuesta.

5.- (1 puntos) Escribe un sistema de cuatro E.D.O. lineales de primer orden no homogéneo de modo que todas sus soluciones sean acotadas. Justifica tu respuesta.

6.-(1 puntos) Calcula $x(t)$ de modo que su transformada de Laplace sea

$$Lx(s) = \frac{(s-2)^2}{((s-2)^2 + 9)^2}$$

7.-(2 puntos) Dibuja las trayectorias de las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 2x + 4y + 6 \end{cases}$$

Problema 1: $x'(t) = -3x(t) + x^2(t) - 4$

a) una soluci3n particular $x_1(t)$

Primero sea una soluci3n constante o no fluctuante

$$x_1(t) \equiv a, \text{ as3 } 0 = -3a + a^2 - 4 = \\ = (a+2)(a-4)$$

Luego $x_1(t) \equiv 4$ es una soluci3n particular
de esta ecuaci3n de Riccati.

b) la funci3n $z(t) = \frac{1}{x(t) - 4}$ no lleva a

$$\boxed{z'(t) = \frac{-x'(t)}{(x(t)-4)^2} = \frac{3x(t) - x^2(t) + 4}{(x(t)-4)^2} =}$$

$$= \frac{-(x(t)+2)(x(t)-4)}{(x(t)-4)^2} = \frac{-(x(t)-4) - 5}{(x-4)} =$$

$$= \boxed{-5z(t) - 1} \quad \text{E.D.O. Lineal}$$

$z(t) = ke^{-5t}$ es la soluci3n de la homog3nea $z' = -5z$

$z(t) = -\frac{1}{5}$ soluci3n particular

Luego $z(t) = -\frac{1}{5} + ke^{-5t}$ soluci3n general de la
E.D.O. Lineal.

Adem3s $\boxed{x(t) = \frac{1}{z(t)} + 4 = \frac{1}{-\frac{1}{5} + ke^{-5t}} + 4 =}$

$$= \frac{5}{-1 + 5ke^{-5t}} + 4 = \frac{1 + 20ke^{-5t}}{-1 + 5ke^{-5t}} \quad \text{E.D.O. Lineal}$$

Soluci3n general de la E.D.O. de Riccati.

PROBLEMA 2:

$$x^{(IV)}(t) + 3x'''(t) + 7x'(t) + x(t) = 0$$

Seja V o espaço vetorial de todas as funções contínuas sobre $\mathbb{R}$ ($C(\mathbb{R})$)

Se $x_1, x_2 \in C(\mathbb{R})$ e são soluções de (1) e (2) (se são soluções, são necessariamente contínuas)

e se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^{(IV)}(t) + 3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)'''(t) + 7(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)'(t) + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t) = \\ & = \lambda_1 x_1^{(IV)} + \lambda_2 x_2^{(IV)} + 3\lambda_1 x_1''' + 3\lambda_2 x_2''' + 7\lambda_1 x_1' + 7\lambda_2 x_2' + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \\ & \stackrel{\text{pois cada um é sol. de (1)}}{=} \lambda_1 (x_1^{(IV)} + 3x_1''' + 7x_1' + x_1) + \lambda_2 (x_2^{(IV)} + 3x_2''' + 7x_2' + x_2) = 0 \end{aligned}$$

Logo $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ é solução

Usando o teorema de existência para

$t=0$ e $x_0 = (1, 0, 0, 0)$ existe x_0 solução com $x_0^{(k)} = \delta_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ $k=0,1,2,3$

$t=0$ e $x_1 = (0, 1, 0, 0)$ existe x_1 solução com $x_1^{(k)} = \delta_{1,k}$ $k=0,1,2,3$

$t=0$ e $x_2 = (0, 0, 1, 0)$ existe x_2 solução com $x_2^{(k)} = \delta_{2,k}$ $k=0,1,2,3$

$t=0$ e $x_3 = (0, 0, 0, 1)$ existe x_3 solução com $x_3^{(k)} = \delta_{3,k}$ $k=0,1,2,3$

Seja x solução e subentão que $x^{(k)}(0) = \lambda_k \in \mathbb{R}$ $k=0,1,2,3$

Seja $y = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, que é uma

solução de (1) com $y^{(k)}(0) = \lambda_k x_k^{(k)}(0) = \lambda_k$

Logo por (2) temos que $x \equiv y$ $x \equiv y$, e y

é uma combinação linear de x_0, x_1, x_2, x_3 , logo é uma combinação linear de soluções de (1) e portanto

uma solução de (1). Logo x_0, x_1, x_2, x_3 são linearmente independentes,

seja $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ uma base

PROBLEMA 3:
$$\begin{cases} x''(t) + a x'(t) + b x(t) = f(t) \\ x(0) = k_1, \quad x'(0) = k_2 \end{cases}$$

Si $x(t) = 3e^{-t} + e^{2t} + \sin t$ es la solución

$x(0) = 3 + 1 = 4$

$k_1 = 4$

$x'(t) = -3e^{-t} + 2e^{2t} + \cos t$

$x'(0) = -3 + 2 + 1 = 0$

LV660

$k_2 = 0$

Por otra parte la función característica de la E.O.V. LINEAL HOMOGÉNEA ASOCIADA es

$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$

Entonces las

soluciones de e^{-t} y e^{2t} son soluciones de la

homogénea y $3e^{-t} + e^{2t}$ es una

solución de la homogénea

Como $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - \lambda - 2 \Rightarrow$

$a = -1$

$b = -2$

$x''(t) = 3e^{-t} + 4e^{2t} - \sin t$

entonces la E.O.V.

$$(3e^{-t} + 4e^{2t} - \sin t) - (-3e^{-t} + 2e^{2t} + \cos t) - 2(3e^{-t} + e^{2t} + \sin t) =$$

$$= (3e^{-t} + 4e^{2t}) - (-3e^{-t} + 2e^{2t}) - 2(3e^{-t} + e^{2t}) + (-\sin t - \cos t - 2\sin t) =$$

$$= -3\sin t - \cos t$$

LV660

$f(t) = -3\sin t - \cos t$

PROBLEM 4: $x' = Ax$ with A

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3 + i, \lambda_3 = 3 - i, \lambda_4 = -8 \text{ (distinct)}$$

For $\lambda_1 = 7$ exists v_1 to compute v_1 and u_1

$$x_1 = e^{7t} v_1 \text{ is a solution of the system}$$

For $\lambda_4 = -8$ exists v_2 to compute v_2 and u_2

$$x_2 = e^{-8t} v_2 \text{ is a solution of the system}$$

$$y(t) = e^{7t} v_1 + e^{-8t} v_2 \text{ is a solution}$$

take $u_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{7t} v_1 + e^{-8t} v_2}{e^{7t} v_1} = \frac{e^{7t} v_1}{e^{7t} v_1} = 1$

and $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{7t} v_1 + e^{-8t} v_2}{e^{-8t} v_2} = \frac{e^{7t} v_1}{e^{-8t} v_2} = 0$

As a function

$$h(t) \rightarrow \{0, \infty\} \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ and } \|e^{7t} v_1 + e^{-8t} v_2\|_2^2 \rightarrow 0$$

is a function continuous take u_1

$$h(t) \rightarrow \infty \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ and } h(t) \rightarrow \infty$$

$h(t)$ is a function t , in other cases exists

$$t_0 \text{ such that } e^{7t_0} v_1 + e^{-8t_0} v_2 = 0, \text{ and } h(t_0) = 0$$

or the solution y becomes 0 at t_0 and $h(t_0) = 0$, but $h(t)$ is a function of t , so $h(t)$ is a function of t .

or the function h , exists t_0 can

$$\min \{ h(t) : t \in \mathbb{R} \} = h(t_0) = r > 0$$

so to compute $\frac{1}{\sqrt{r}} y(t)$, take u_1

$$\| \frac{1}{\sqrt{r}} y(t) \|_2 = \sqrt{ \| \frac{1}{\sqrt{r}} y(t) \|_2^2 } = \sqrt{ \frac{1}{r} \| y(t) \|_2^2 } \geq 1$$

for all t .

PROBLEMA 4] con otro caso

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es solución de $x' = Ax$
la función $(A \cos x)$ es combinación
lineal. de funciones de la forma

$t^r e^{zt}$, $t^r e^{-zt}$, $t^s e^{zt}$, $t^s e^{-zt}$ con $r, s, z \in \mathbb{C}$.

Entonces es posible que los x estén acotados
sobre que todas sus componentes x_j sean acotadas.
— u —

PROBLEMA 5:) sea el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2(t) + 1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(t) + 1$$

$$\dot{x}_3 = x_4 + 1$$

$$\dot{x}_4 = -x_3 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LA matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

tiene los valores $\lambda = \pm i$

en multiplicitad 2

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

matriz fundamental

del

sistema

una solución particular del sistema no homogéneo

$$x \equiv [-1, 1, -1, 1]$$

La solución general es la suma de la solución particular y la solución homogénea

$$x(t) = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t - 1, & -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 1, \\ c_3 \cos t + c_4 \sin t - 1, & -c_3 \sin t + c_4 \cos t + 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de las soluciones está en la forma.

PROBLEMA 6

$$SI \quad L(x(s)) = \frac{(s-2)^2}{((s-2)^2+9)^2} \quad \begin{matrix} = \\ \downarrow \\ \text{descomposici3 en} \\ \text{fracci3s simples} \end{matrix}$$

$$\frac{As+B}{(s-2)^2+9} + \frac{Cs+D}{((s-2)^2+9)^2} = \dots etc$$

UN pocu m3s curto, en las tablas abstracta

$$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \quad \gamma \quad \text{tambi3n} \quad \frac{a}{s^2+a^2}$$

Ahora

$$\frac{(s-2)^2}{((s-2)^2+9)^2} = \frac{(s-2)^2-9}{((s-2)^2+9)^2} + \frac{9}{((s-2)^2+9)^2}$$

$$L(e^{2t} t \cos 3t) = \frac{(s-2)^2-9}{((s-2)^2+9)^2} \quad \begin{matrix} \text{usando las} \\ \text{tablas} \end{matrix}$$

Ahora

$$\frac{9}{((s-2)^2+9)^2} = k_1 \frac{3}{(s-2)^2+9} + k_2 \frac{(s-2)^2-9}{((s-2)^2+9)^2} =$$

$\downarrow$
poner en

$$= \frac{3k_1((s-2)^2+9) + k_2((s-2)^2-9)}{((s-2)^2+9)^2} =$$

$$= \frac{3k_1(s-2)^2 + 27k_1 + k_2(s-2)^2 - 9k_2}{((s-2)^2+9)^2} = \frac{9}{((s-2)^2+9)^2}$$

$$3k_1 + 3k_1 - 1 = 0$$

Curto

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 = 0 \\ 27k_1 - 9k_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3k_1 - k_2 = 1 \Leftrightarrow k_2 = 3k_1 - 1$$

Assi $k_1 = \frac{1}{6} \quad \gamma \quad k_2 = -\frac{1}{2}$

Ass

$$L\left[\frac{1}{6}e^{2t} \sin 3t - \frac{1}{2}e^{2t} t \cos 3t\right] = \frac{9}{((s-2)^2+9)^2} \quad (+ \text{tablas})$$

por tanto la funci3n x que buscamos es

$$x(t) = e^{2t} t \cos 3t + \frac{1}{6} e^{2t} \sin 3t - \frac{1}{2} e^{2t} t \cos 3t =$$

$$= e^{2t} \left[\frac{1}{2} t \cos 3t + \frac{1}{6} \sin 3t \right]$$

PROBLEMA 7

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 1 \\ y' &= 2x + 4y + 6 \end{aligned}$$

ONSTANTEMENTE QUE O SISTEMA EM EQUILIBRIO
PODE TER EQUILIBRIOS Y A QUA

$$0 = x + 2y + 1$$

$$0 = 2x + 4y + 6$$

ES UM SISTEMA LINEAR

ESTABILIDADE DO SISTEMA EM EQUILIBRIO

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

LA MATRIZ A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

TESTE DE AUTOVALORES

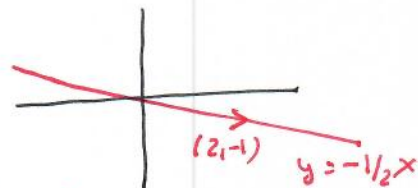
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

$\lambda = 0$ ES AUTOVALAR Y ASSOCIADO A UM VETOR

$$x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -1/2 x$$

ES UMA RETA NO PLANO

EQUILIBRIO (OBSERVE O SISTEMA HOMOGENEO)



$\lambda = 5$ DO NA LÍNEA AUTOVALAR

$$-2x + 2y = 0$$

$$v_2 = (1, 2)$$

ONSTANTEMENTE QUE v_2 IS ORTOGONAL A $(2, -1)$

ALGO $(2, -1)$ IS UMA SOLUÇÃO DE EQUILIBRIO

$e^{5t} (1, 2)$ IS OUTRA SOLUÇÃO INDEPENDENTE

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 & e^{5t} \\ -1 & 2e^{5t} \end{pmatrix}$$

IS UMA MATRIZ FUNDAMENTAL

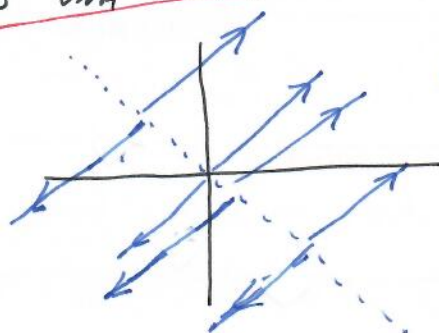


DIAGRAMA DE FASE
DO
SISTEMA
HOMOGENEO

Pzw Bspmt F:

VAmer A gesucht um solution partikuläre
ntz Pzw Bspmt zu erhalten
Methode ist Variation der Konstanten!

funktion $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & e^{st} \\ -1 & 2e^{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$ solution partikuläre

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}' = \Phi'(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = A \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \end{pmatrix} =$$

↓
system of
stn
solution

↓
matrix
function

$$= A \Phi(t) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ass $\begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

calculate $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 e^{-st} & 2/5 e^{-st} \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & e^{st} & 1 & 0 \\ -1 & 2e^{st} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{e^{st}}{2} & 1/2 & 0 \\ -1 & 2e^{st} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{e^{st}}{2} & 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}e^{st} & 1/2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{e^{st}}{2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{e^{-st}}{5} & \frac{2}{5}e^{-st} \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{e^{-st}}{5} & \frac{2}{5}e^{-st} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} I & & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ & & \frac{e^{-st}}{5} & \frac{2e^{-st}}{5} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ \frac{e^{-st}}{5} & \frac{2e^{-st}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ \frac{13}{5}e^{-st} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} k_1 &= -1/5 t \\ k_2 &= -\frac{13}{25}e^{-st} \end{aligned}$$

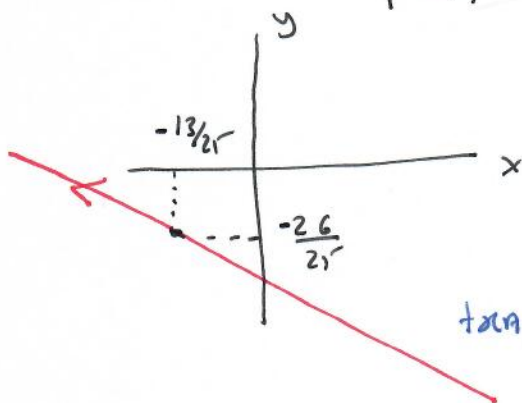
problema 7

CV660
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & e^{st} \\ -1 & 2e^{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ -\frac{13}{2r}e^{-st} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{8}{r}t - \frac{13}{2r}, \frac{1}{2}t - \frac{26}{2r} \right) =$$

$$= t \begin{pmatrix} -\frac{8}{r} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{2r} \\ -\frac{26}{2r} \end{pmatrix}$$

ecuación paramétrica
de una recta



tangente en el origen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \begin{pmatrix} -\frac{8}{r} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{2r} \\ -\frac{26}{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty \\ \infty \end{pmatrix}$$

Observamos que esta recta y
la recta de origen se convierten
en la misma línea cuando r
se aproxima a 0

Solución general de sistema

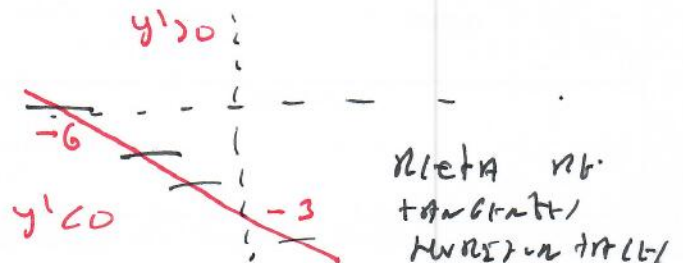
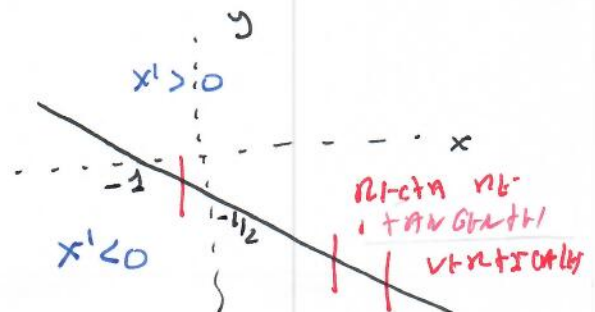
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{8}{r} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{2r} \\ -\frac{26}{2r} \end{pmatrix} + k_1 (2, -2) + k_2 e^{st} (1, 2)$$

Observamos $\boxed{s = k_2 = 0}$, las tangentes son la
misma recta que la solución singular

Zonas de estabilidad

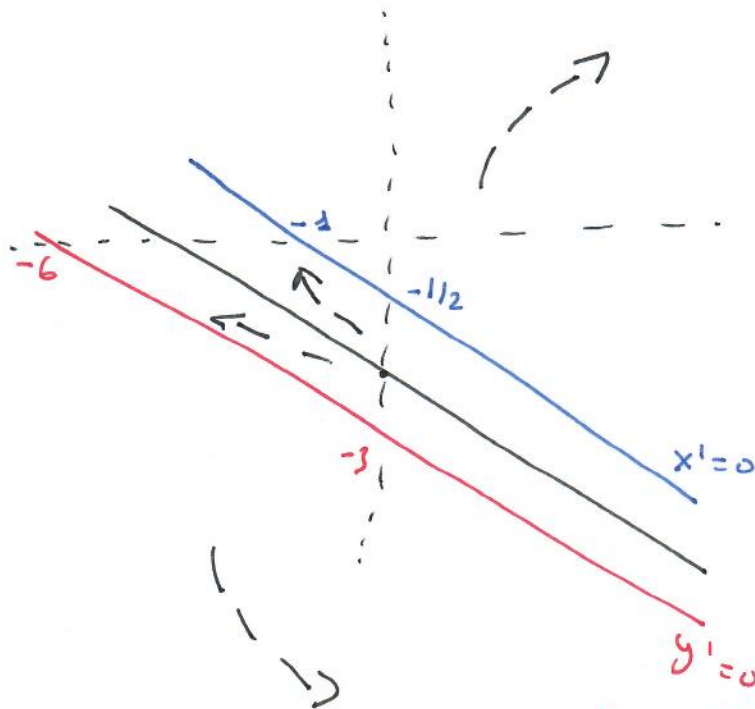
$$x' = 0 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$$

$$y' = 0 \Rightarrow x + 2y + 6 = 0$$



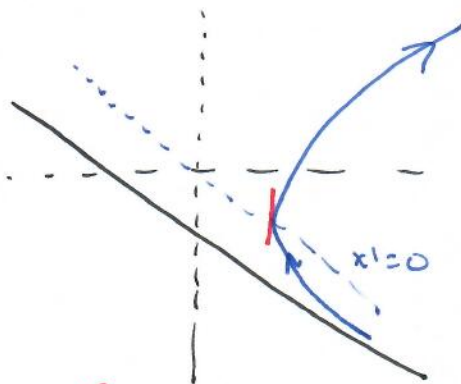
PROBLEMA 7

OBSERVAR QUE LA TRANSICIÓN SINGULAR
Y LAS RECTAS $x'=0$ Y $y'=0$ SON RECTAS
C.N



$\boxed{\text{Si } k_2 > 0}$

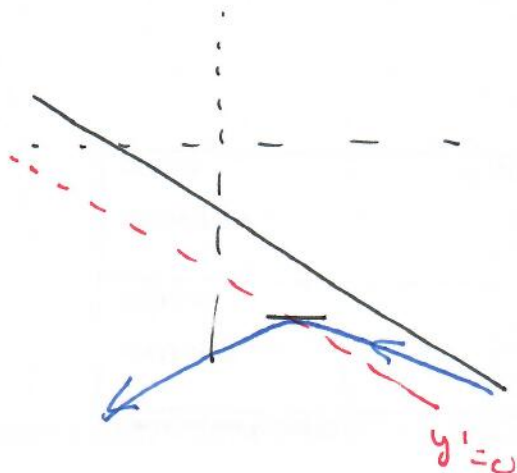
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow -\infty \\ k_2 e^{rt} (1, 2) \rightarrow 0 \end{cases}$$



$\boxed{\text{Si } k_2 < 0}$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) =$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty \\ k_2 e^{rt} (1, 1) \rightarrow 0 \end{cases}$$



PROBLEM 7

y axis is horizontal or fast curve

