EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL 2020-2021
Convocatoria Extraordinaria (13 de Julio de 2021)

1. Demuestra que las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 son todas las soluciones de la ecuación polinómica:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0.$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{321}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{7}{2} & \frac{8}{3} & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 112 & 113 & 71 & 84 & 93 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra otra matriz Q de modo que

$$QA = \begin{pmatrix} \frac{321}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{7}{2} & \frac{8}{3} & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 112 & 113 & 71 & 84 & 93 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Qué orden tiene que tener Q?

3. Calcula la forma normal de Hermite por filas y el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Consideramos la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$, dada por

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 3x + y + z, 6x + 2y + 2z, 2x + 2z).$$

a) Halla una base del núcleo de f y una base de la imagen de f.
b) Halla la matriz asociada a f respecto de la base $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

5. Escribe la matriz respecto de las bases canónicas de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ formen una base de $\mathrm{Ker}(f)$, y $\{(1, 2, 1), (3, 0, 3)\}$ formen una base de $\mathrm{Im}(f)$. Justifica tu respuesta. ¿Existe una única aplicación lineal f que satisfaga dichas condiciones?

6. Calcula $\begin{vmatrix} 4a & 5a & 6a & 8a \\ 0 & b & 2b & 4b \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Elimina los parámetros: $\begin{cases} x = 1 + \beta - \lambda + \mu \\ y = 2 + \beta + \lambda + 3\mu \\ z = 1 + \beta - \lambda + \mu \\ w = 2 \end{cases}$

8. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Es A una matriz diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? Si la respuesta es afirmativa, encuentra una matriz real D diagonal y una matriz real P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.

ALGEBRA 13-VII-2021

PROBLEMA 1:] DEMUESTRA QUE LAS RAÍCES n-ÉSIMAS DE 1 DISTINTAS DE 1 SON TODAS LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN POLINÓMICA

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z^2+z+1=0$$

LAS RAÍCES n-ÉSIMAS DE 1 SON n, SEA a UNA DE ELLAS DISTINTA DE 1, $a\neq 1$, ENTRANDO EN LA ECUACIÓN POLINÓMICA

$$a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a^2+a+1=$$

$$a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a^2+a+a^n=$$

SACANDO FACTOR COMÚN LA a

$$=a\left(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\dots+a+1\right)$$

SI $a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1)\neq 0$ ENTONCES SIMPLIFICANDO EN LA IGUALDAD $a=1$, LO CUÁL NO ES POSIBLE.

ASÍ $a^{n-1}+\dots+a+1=0$ PARA TODO $a\in\mathbb{C}$ CON $a^n=1$ y $a\neq 1$.

PROBLEMA 2:] DADA LA MATRIZ $A=\begin{pmatrix} \frac{321}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} & \frac{8}{3} & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 112 & 113 & 71 & 84 & 93 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ENCUENTRA Q DE MODO QUE $QA=\begin{pmatrix} \frac{321}{2} & \frac{11}{2} & \frac{7}{2} & \frac{8}{3} & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 112 & 113 & 71 & 84 & 93 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

¿QUÉ ORDEN TIENE QUE TENER Q? COMPROBAR QUE Q QUE ENCONTRASTE VERIFICA LA PROPIEDAD PEDIDA

$A\in M_{4\times 5}$ $QA\in M_{4\times 5}$ LUEGO $Q\in M_{4\times 4}$, PARA QUE EL PRODUCTO SEA POSIBLE. OBSERVAMOS QUE QA ES LA MATRIZ A INTERCAMBIANDO LAS FILAS 2 Y 4 LUEGO SI Q ES LA MATRIZ DE TAL TRANSFORMACIÓN ELEMENTAL

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PRODUCE EN A EL INTERCAMBIO DE LA FILA 2 POR LA FILA 4.

PROBLEMA 3:] CALCULA LA FORMA NORMAL DE HERMITE POR FILAS Y EL RANGO DE LA MATRIZ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

YA PODEMOS DECIR QUE EL RANGO DE LA MATRIZ ES TRES, YA QUE LA HEMOS ESCALONADO Y TIENE TRES PIVOTES NO NULOS

$$\underset{\substack{F_2 - F_3 \\ F_1 - F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1 - 2F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NORMAL DE HERMITE.

PROBLEMA 4:] CONSIDERAMOS LA APLICACIÓN $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ DADA POR $f(x,y,z) = (x+y-z, 3x+y+z, 6x+2y+2z, 2x+2z)$

a) HALLA UNA BASE DEL NÚCLEO DE f Y UNA BASE DE LA IMAGEN DE f.

b) HALLA LA MATRIZ ASOCIADA A f RESPECTO DE LA BASE $\{(1,1,0), (0,1,1), (-1,2,1)\}$ DE $\mathbb{R}^3$ Y LA BASE CANÓNICA DE $\mathbb{R}^4$.

a) $$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

OBSERVAMOS QUE $2(3,1,1) = (6,2,2)$

Y QUE $-(1,1,-1) + (3,1,1) = (2,0,2)$

LUEGO EL RANGO DE LA MATRIZ DE f 2

COMO $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$,

$\mathrm{Im}\, f = \mathcal{L}[(1,3,6,2),\ (1,1,2,0)]$

ASÍ POR LA FÓRMULA DE LA DIMENSIÓN

$$3 = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f \implies \boxed{\dim \ker f = 1.}$$

VAMOS A ENCONTRAR UN VECTOR NO NULO DE $\ker f$, PARA ELLO RESOLVEMOS EL SISTEMA

$$f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Rang MATRIZ = 2

$$\implies \begin{array}{l} x + y = z \\ 3x + y = -z \end{array} \quad \text{LUEGO} \quad y = -z - 3x$$

ASÍ $x + (-z - 3x) = z$, LUEGO $x = -z$

Y TENEMOS

$$\begin{aligned} x &= -z \\ y &= -z - 3x = 2z \\ z &= z \end{aligned} \quad \text{LUEGO}$$

$$\ker f = \mathcal{L}[(-1,2,1)].$$

b)

AHORA

$$f(1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(-1,2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ASÍ RESPECTO DE LA NUEVA BASE, DE SALIDA EN $\mathbb{R}^4$ LA BASE CANÓNICA f TIENE POR MATRIZ ASOCIADA

$$\left(f(1,1,0)\ \ f(0,2,4,2)\ \ f(-1,2,1) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

EN COLUMNAS

OBSERVAMOS QUE $(2,4,8,2) = (1,3,6,2) + (1,1,2,0)$ y QUE $(0,2,4,2) = (1,3,6,2) - (1,1,2,0)$

PROBLEMA 5º) ESCRIBE LA MATRIZ ASOCIADA DE LAS BASES CANÓNICAS DE UNA APLICACIÓN LINEAL $f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ TAL QUE

$\{(1,0,0,0,0)\ (0,1,0,0,0),\ (0,0,0,0,1)\}$

FORMAN UNA BASE DEL KER f Y $\{(1,2,1),(3,0,3)\}$

FORMAN UNA BASE DE $\mathrm{Im}\, f$. JUSTIFICA TU RESPUESTA. ¿EXISTE UNA ÚNICA APLICACIÓN LINEAL f QUE SATISFAGA DICHAS CONDICIONES?

SI LLAMAMOS

$e_1 = (1,0,0,0,0)$

$e_2 = (0,1,0,0,0)$

$e_3 = (0,0,1,0,0)$

$e_4 = (0,0,0,1,0)$

$e_5 = (0,0,0,0,1)$

Y TOMAMOS

$f(e_1) = 0$

$f(e_2) = 0$

$f(e_3) = (1,2,1)$

$f(e_4) = (3,0,3)$

$f(e_5) = 0$

LA APLICACIÓN $f\ \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$x = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \rightarrow f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

ES UNA APLICACIÓN COMO LA PEDIDA, CUYA MATRIZ ASOCIADA ES LA ANTERIOR. AHORA f NO ES ÚNICA CON ESAS CARACTERÍSTICAS

POR EJEMPLO SI TOMAMOS $g\ \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ TAL QUE

$g(e_1) = 0$

$g(e_2) = 0$

$g(e_3+e_4) = (1,2,1)$

$g(e_3-e_4) = (3,0,3)$

$g(e_5) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(e_3) = g\left(\frac{1}{2}((e_3+e_4)+(e_3-e_4))\right) = \\ = 1/2((1,2,1)+(3,0,3)) = (2,1,2) \\ g(e_4) = g\left(\frac{1}{2}((e_3+e_4)-(e_3-e_4))\right) = \\ = 1/2((1,2,1)-(3,0,3)) = (-1,1,-1) \end{cases}$$

SE SIGUE QUE $g\ \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$x \longrightarrow g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

ES OTRA APLICACIÓN QUE CUMPLE CON EL ENUNCIADO.

PROBLEMA 6: CALCULA

$$\begin{vmatrix} 4a & 5a & 6a & 8a \\ 0 & b & 2b & 4b \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

DADO QUE LA PRIMERA FILA ESTÁ MULTIPLICADA POR a Y LA SEGUNDA POR b

$$= a \cdot b \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$F_1 - 4F_4$
$F_3 - F_4$

$$= a\, b \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ YA QUE TIENE FILAS IGUALES

PROBLEMA 7: ELIMINA LOS PARÁMETROS (β, λ, μ)

$$\begin{cases} x = 1 + \beta - \lambda + \mu \\ y = 2 + \beta + \lambda + 3\mu \\ z = 1 + \beta - \lambda + \mu \\ w = 2 \end{cases}$$

ESCRIBIMOS
$$\begin{aligned} x - 1 &= \beta - \lambda + \mu \\ y - 2 &= \beta + \lambda + 3\mu \\ z - 1 &= \beta - \lambda + \mu \end{aligned} \iff$$

LOS VECTORES $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Y $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ NO SON INDEPENDIENTES

$$\iff \begin{aligned} x - 1 &= \beta - \lambda + (2-1)\mu = (\beta + 2\mu) - (\lambda + \mu) \\ y - 2 &= \beta + \lambda + (2+1)\mu = (\beta + 2\mu) + (\lambda + \mu) \\ z - 1 &= \beta - \lambda + (2-1)\mu = (\beta + 2\mu) - (\lambda + \mu) \end{aligned}$$

ES DECIR $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$ SON COMBINACIÓN LINEAL DE LOS VECTORES $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ASÍ $0 = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$F_1 + F_2$
$F_3 + F_2$

$$= \begin{vmatrix} x+y-3 & 2 & 0 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z+y-3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} x+y-3 & 2 \\ z+y-3 & 2 \end{vmatrix} = -\left\{ \left[2x + \cancel{2y} \cancel{-6} \right] - \left[2z + \cancel{2y} \cancel{-6} \right] \right\}$$

$= -[2x - 2z] = -2x + 2z$; ASÍ LLEGAMOS A $\left\{ \boxed{\begin{aligned} -2x + 2z &= 0 \\ w &= 2 \end{aligned}} \right.$

PROBLEMA 8: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

¿Es A diagonalizable en $\mathbb{R}$? Si la respuesta es afirmativa, encuentra una matriz real D diagonal y una matriz P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.

- Calculamos los autovalores de la matriz

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

DESARROLLO ÚLTIMA FILA

$$= 1 - \lambda\left[-\lambda(1-\lambda) + 1\right] = 1 + \lambda^2(1-\lambda) - \lambda =$$

$$= (\lambda^2 + 1)(1 - \lambda).$$

Los autovalores son $\lambda = 1$ $\lambda = \pm i$

Dado que tiene autovalores complejos, no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.