# EXAMEN Elem. de E.D.O. 21 de Julio 2021.

**Nombre y apellidos:**..............................................................

**1.-** (2 puntos) Resuelve la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & \frac{1}{7t+x^2(t)} \\ x(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

**2.-** (2 puntos) Sea $q(t)$ un polinomio de grado 3. Prueba que la E.D.O.

$$x'''(t) + a_1 x''(t) + a_2 x'(t) + a_3 x(t) = q(t), \qquad a_3 \neq 0,$$

tine una solución particular que es un polinomio de grado menor o igual que 3.

**3.-** (2 puntos) Resuelve el problema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) & = & e^{-t} \operatorname{sen} 3t \\ x(0) = 1, \quad x'(0) & = 0. \end{array} \right.$$

**4.-** (2 puntos) Dada la matriz $A \in M_{9\times 9}$ por

$$A = \left( \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & & & \cdots & & & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & 1 & 0 \\ & & 1 & & & & 1 & & 0 \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ \vdots & & & & 1 & & & & \vdots \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & & \cdots & & & 0 & 1 \end{array} \right),$$

calcula $e^{At}$.

**5.-**(2 punto) Dibuja las trayectorias de las soluciones del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + 2y + 3 \\ y' & = & 2x + 4y + 6 \end{array} \right.$$

PROBLEMA 1º

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{7t + x^2(t)} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

SI CONSIDERAMOS

$$\begin{cases} t'(x) = \dfrac{1}{x'(t)} = 7\,t(x) + x^2 \\ t(1) = 0 \end{cases}$$

E.D.O LINEAL.

HOMOGÉNEA $\quad t'(x) = 7\,t(x) \quad$ SOLUCIÓN $t(x) = k e^{7x}$ $k \in \mathbb{R}$

SOLUCIÓN PARTICULAR. COMO $f(x) = x^2$ ES UN POLINOMIO, PROBAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL MISMO TIPO

$$t_0(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$t_0'(x) = 2Ax + B$$

ENTRANDO EN LA E.D.O CON $t_0$

$$2Ax + B = 7(Ax^2 + Bx + C) + x^2 =$$

$$= (7A + 1)x^2 + 7Bx + 7C$$

LUEGO $\quad 7A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1/7$

$7B = 2A \Rightarrow 7B = -2/7 \Rightarrow B = -\dfrac{2}{49}$

$7C = B \Rightarrow 7C = \dfrac{-2}{49} \qquad C = \dfrac{-2}{346}$

LUEGO $\quad t_0(x) = -1/7\,x^2 - 2/49\,x - 2/346.$

SOLUCIÓN GENERAL

$$\boxed{t(x) = k e^{7x} - \left(1/7\,x^2 + \frac{2}{49}x + \frac{2}{346}\right). \quad k \in \mathbb{R}}$$

EN NUESTRO CASO $t(1) = 0$

LUEGO $\quad 0 = k e^{7} - \left(1/7 + \dfrac{2}{49} + \dfrac{2}{346}\right).$

LUEGO $\quad k = \dfrac{1}{7e^7}\left(1 + \dfrac{2}{7} + \dfrac{2}{49}\right).$

Y ASÍ $\quad \boxed{t(x) = \dfrac{1}{7e^7}\left(1 + \dfrac{2}{7} + \dfrac{2}{49}\right)e^{7x} - \left(\dfrac{1}{7}x^2 + \dfrac{2}{49}x + \dfrac{2}{346}\right)}$

SOLUCIÓN NO SE PUEDE DESPEJAR X.

$\boxed{\text{PROBLEMA 2:}}$ $x'''(t) + a_1 x''(t) + a_2 x'(t) + a_3 x(t) = q(t)$

con $a_3 \neq 0$

$$q(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$$

Intentamos una solución del tipo

$$Q(t) = B_3 t^3 + B_2 t^2 + B_1 t + B_0$$

$$Q'(t) = 3B_3 t^2 + 2B_2 t + B_1$$

$$Q''(t) = 6B_3 t + 2B_2$$

$$Q'''(t) = 6B_3$$

Entrando en la EDO

$$6B_3 + a_1(6B_3 t + 2B_2) + a_2(3B_3 t^2 + 2B_2 t + B_1) + a_3(B_3 t^3 + B_2 t^2 + B_1 t + B_0) =$$

$$= (a_3 B_3) t^3 + (a_3 B_2 + a_2 3B_3) t^2 + (a_3 B_1 + a_2 2B_2 + a_1 6B_3) t + (a_3 B_0 + a_2 B_1 + 2a_1 B_2 + 6B_3) =$$

$$= b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$$

Lo que implica que

$$a_3 B_3 = b_3, \quad \text{así} \quad B_3 \underset{a_3 \neq 0}{=} \frac{b_3}{a_3}$$

$$a_3 B_2 + a_2 3 B_3 = a_3 B_2 + a_2 3 \frac{b_3}{a_3} = b_2$$

$$\text{así} \quad B_2 \underset{a_3 \neq 0}{=} \left(b^2 - 3a_2 \frac{b_3}{a_3}\right) \frac{1}{a_3}$$

$$a_3 B_1 + 2a_2 B_2 + a_1 6 B_3 = b_1$$

$$\text{así} \quad B_1 = \frac{1}{a_3}\left[b_1 - 2a_2 B_2 - 6a_1 B_3\right] =$$

$$= \frac{1}{a_3}\left[b_1 - 2a_2 \frac{1}{a_3}\left(b^2 - 3a_2 \frac{b_3}{a_3}\right) - 6a_1 \frac{b_3}{a_3}\right]$$

## PROBLEMA 2:

POR ÚLTIMO

$$a_3 B_0 + a_2 B_1 + 2a_1 B_2 + 6 B_3 = b_0$$

Y POR TANTO

$$B_0 \underset{a_3 \neq 0}{=} \frac{1}{a_3}\left[b_0 - a_2 B_1 - 2a_1 B_2 - 6 B_3\right] =$$

$$= \frac{1}{a_3}\Big[b_0 - a_2 \frac{1}{a_3}\left[b_1 - 2a_2 \frac{1}{a_3}\left(b_2 - 3a_2 \frac{b_3}{a_3}\right) + 6a_1 \frac{b_3}{a_3}\right]$$

$$- 2a_1 \frac{1}{a_3}\left[b_2 - 3a_2 \frac{b_3}{a_3}\right]$$

$$- 6\frac{b_3}{a_3}\Big]$$

PARA ESTOS $B_0, B_1, B_2$ Y $B_3$ TENEMOS UN POLINOMIO SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O

PROBLEMA 3:

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = e^{-t}\,\text{sen}\,3t \\ x(0)=1, \quad x'(0)=0 \end{cases}$$

USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}(x'' + 2x' + 10x)(s) =$$

$$= \mathcal{L}x''(s) + 2\mathcal{L}x'(s) + 10\,\mathcal{L}x(s) =$$

$$= s^2\mathcal{L}x(s) - s\,x(0) - x'(0) + 2\left[s\,\mathcal{L}x(s) - x(0)\right] + 10\,\mathcal{L}x(s) =$$

$$= \left[s^2 + 2s + 10\right]\mathcal{L}x(s) - s - 2 = \mathcal{L}\left[e^{-t}\,\text{sen}\,3t\right](s) \underset{\text{TABLAS}}{=} \frac{3}{(s+1)+9}$$

DESPEJANDO

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s^2+2s+10}\left[(s+2) + \frac{3}{(s+1)+9}\right] =$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2+9}\left[s+2 + \frac{3}{(s+1)+9}\right] =$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{(s+1)^2+9} + \frac{3}{((s+1)^2+9)^2}$$

LOS DOS PRIMEROS SUMANDOS LOS PODEMOS VER EN LAS TABLAS

$$\mathcal{L}\left[e^{-t}\cos 3t\right] = \frac{s+1}{(s+1)^2+9}$$

y $$\mathcal{L}\left[\tfrac{1}{3}e^{-t}\,\text{sen}\,3t\right] = \frac{1}{3}\,\frac{3}{(s+1)^2+9} = \frac{1}{(s+1)^2+9}$$

AHORA $\dfrac{3}{((s+1)^2+9)^2}$ PODEMOS DESCOMPONER EN FRACCIONES SIMPLES O PROBAR

$$\frac{3}{((s+1)^2+9)^2} = k_1\,\frac{3}{(s+1)^2+9} + k_2\,\frac{(s+1)^2-9}{((s+1)^2+9)^2}$$

$$= \frac{3k_1\left[(s+1)^2+9\right] + k_2(s+1)^2 - 9k_2}{((s+1)^2+9)^2}$$

PROBLEMA 3:

Así $3k_1 + k_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $k_1 = -\frac{k_2}{3}$

$27k_1 - 9k_2 = 3$ $\quad 9k_1 - 3k_2 = 1$

Así $k_1 = -\frac{k_2}{3}$ $\quad k_1 = \frac{1}{18}$

$9\left(-\frac{k_2}{3}\right) - 3k_2 = 1 \Rightarrow k_2 = -1/6$

Luego
$$\frac{3}{((s+1)^2+9)^2} = \frac{1}{18}\frac{3}{(s+1)^2+9} - \frac{1}{6}\frac{(s+1)^2-9}{((s+1)^2+9)^2}$$

Usando las tablas

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{18}e^{-t}\operatorname{sen} 3t - \frac{1}{6}e^{-t}t\cos 3t\right\}(s) =$$
$$= \frac{1}{18}\frac{3}{(s+1)^2+9} - \frac{1}{6}\frac{(s+1)^2-9}{((s+1)^2+9)^2} = \frac{3}{((s+1)^2+9)^2}$$

Luego la solución buscada es

$$\boxed{x(t)} = e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{18}e^{-t}\operatorname{sen} 3t - \frac{1}{6}e^{-t}t\cos 3t =$$
$$\boxed{= e^{-t}\left[\cos 3t + \frac{7}{18}\operatorname{sen} 3t - \frac{1}{6}t\cos 3t\right]}$$

COMPROBACIÓN

$x(0) = 1\{1 + 0 + 0\} = 1$

$x'(t) = -e^{-t}\left[\cos 3t + 7/18 \operatorname{sen} 3t - 1/6\, t\cos 3t\right] + e^{-t}\left\{-3\operatorname{sen} 3t + \frac{7}{6}\cos 3t - 1/6\cos 3t + 1/2\, t \operatorname{sen} 3t\right]$

$x'(0) = -1\left[1 + 0 - 0\right] + 1\left[0 + 7/6 - 1/6 + 0\right] = -1 + 1 = 0$

Además la ec característica de $x'' + 2x' + 10x = 0$

es $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = -1 \pm 3i$

Luego $e^{-t}\cos 3t$ y $7/18\, e^{-t}\operatorname{sen} 3t$ son soluciones de la homogénea.

## PROBLEMA 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 0 & \cdot & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{9\times 9}$$

$$A = I + \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & & 1 \; 0^{1} & & 0 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} = I + B$$

Como $IB = BI$, $I$ es la identidad

$$e^{At} = e^{(I+B)t} = e^{It} e^{Bt} = e^{t} I \, e^{Bt}$$

Ahora $$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 \; 0^{1} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & 1 \; 0^{1} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ & & 1 \; 0 \; 1 & & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = B$$

Así $$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k t^k}{k!} \underset{B^0 = I}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B \, t^{2k+1}}{(2k+1)!} + I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^2 \, t^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ & 0 & \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} & & \\ & 1 & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$e^{At} = e^{t} I e^{Bt} = e^{t} e^{Bt} = \begin{array}{c} \text{columnas} \\ \begin{pmatrix} e^{t}\cosh t & 0 & & 0 & e^{t}\operatorname{senh} t \\ 0 & e^{t}\cosh t & & e^{t}\operatorname{senh} t & 0 \\ & & e^{t} & & \\ & e^{t}\operatorname{senh} t & & e^{t}\cosh t & \\ e^{t}\operatorname{senh} t & & & & e^{t}\cosh t \end{pmatrix} \end{array} \text{filas}$$

PROBLEMA 5: Representa el DIAGRAMA DE FASES DE

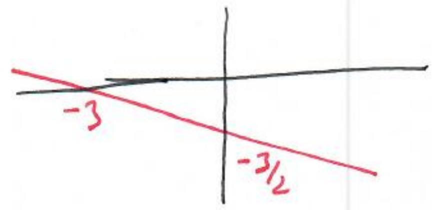
$$\begin{cases} x' = x + 2y + 3 \\ y' = 2x + 4y + 6 \end{cases}$$

PUNTO DE EQUILIBRIO $\begin{cases} 0 = x + 2y + 3 \\ 0 = 2x + 4y + 6 \end{cases}$

COMO $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ Y $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 1$

TENEMOS POR SOLUCIÓN LA RECTA $0 = x + 2y + 3 \iff$

$\iff \boxed{y = -\frac{1}{2}(x+3)}$ RECTA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO




SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO:

$x' = x + 2y$
$y' = 2x + 4y$

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 =$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

PARA $\lambda = 0$ AUTOVECTOR $0 = x + 2y \iff y = -\frac{1}{2}x$

(RECTA PARALELA A LA RECTA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO)

PARA $\lambda = 5$ AUTOVECTOR $0 = -4x + 2y \iff y = 2x$ $\quad v_1 = (1,2)$

ASÍ $k e^{5t} v_1$ SON SOLUCIONES

LA SOLUCIÓN GENERAL ES

$(x, y) = k_1 (1, -\frac{1}{2}) + k_2 e^{5t} v_1$ $\quad$ ($v_1$ ORTOGONAL A $(1, -\frac{1}{2})$)

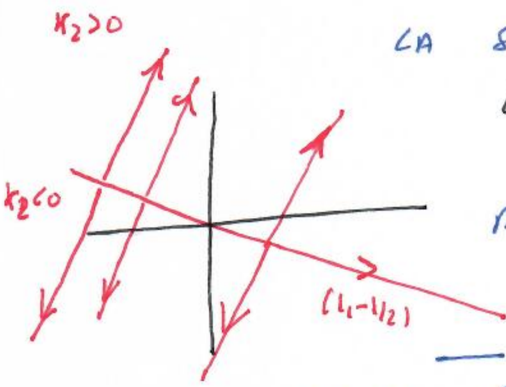
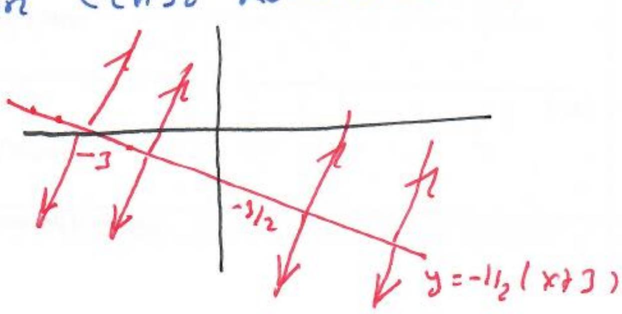



DIAGRAMA DE FASES DEL CASO HOMOGÉNEO

— o —

AHORA COMO CADA PUNTO DE $y = -\frac{1}{2}(x+3)$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA Y ESTA RECTA ES PARALELA A $y = -\frac{1}{2}x$, SE SIGUE: DIAGRAMA DE FASES ES UNA TRASLACIÓN DEL ANTERIOR (CASO HOMOGÉNEO)




RECTA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO