EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

6 Julio de 2021.

1.- Prueba que la sucesión de funciones $\left(f_n(x) = \dfrac{x+n}{x^2+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$, con $x \in \mathbb{R}$, converge puntualmente y uniformemente en todo $\mathbb{R}$.

2.- Calcula la Transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} te^{-2t} & si \quad t \geq 0 \\ \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

3.- Resuelve el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) & = & \frac{x^2(t)}{t^2+1} \\ \\ \lim_{t\to\infty} x(t) & = & \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

4.- Encuentra x que satisfaga: $\begin{cases} 3x & \sim & 8 & \text{mód } 7 \\ x & \sim & 5^{2021} & \text{mód } 6 \end{cases}$

5.- Consideramos el grupo $G = (\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{14}, +)$.
¿De cuántos ordenes pueden ser los elementos de G? Justifica tu respuesta.
Encuentra elementos de G de cada uno de los ordenes posibles.

6.- Considera el anillo $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_2[x]/ < x^3 + x + 1 >$. Describe sus elementos. ¿Es este anillo un cuerpo? Encuentra $(1+x)^{185}$ en $\mathbb{A}$.

Revisión del examen:
.- No será presencial.
.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-20-21/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/
.- Si un alumno está en desacuerdo con su nota deberá enviar un e-mail a su profesor, al menos 24 horas antes de la revisión, indicando el motivo de su petición.
.- El día y a la hora de la revisión el alumno deberá estar pendiente de que el profesor se ponga en contacto con él.
La revisión del examen se efectuará el día 16 de Julio de 16h horas. No es obligatorio solicitar la revisión.
Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 2h 55' horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

A LAS 19h 55' TODOS DEBEMOS ESTAR FUERA DEL AULA

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Las siguientes funciones tienen por Transformadas de Laplace las funciones en s que figuran a su lado:

(1) Si $f(t) = 1$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{1}{s}$

(2) Si $f(t) = \mathrm{sen}(t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{1}{s^2+1}$

(3) Si $f(t) = \cos(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

(4) Si $f(t) = e^{-\alpha t}$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$

(5) Si $f(t) = \mathrm{senh}(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

(6) Si $f(t) = \cosh(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$

(7) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\mathrm{sen}(\beta t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(8) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

(9) En general, dada $f(t)$, entonces $\quad L[e^{-\alpha t}f(t)](s) = Lf(s+\alpha)$

(10) Si $f(t) = t^n$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, ($\Gamma$ es la función Gamma de Euler, $\Gamma(n+1) = n!$).

(11) Si $f(t) = te^{-\alpha t}$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$

(12) Si $f(t) = t\mathrm{sen}(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$

(13) Si $f(t) = t\cos(\alpha t)$, entonces $\quad Lf(s) = \frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$

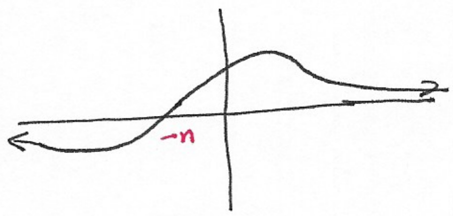
(14) En general, dada $f(t)$, entonces $\quad L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{\partial^n Lf(s)}{\partial s^n}$

PROBLEMA 1:- $f_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

FIJANDO x: $\lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{x^2+n^2} = 0$

LUEGO f_n CONVERGE PUNTUALMENTE A CERO PARA TODO $\mathbb{R}$.

AHORA $f_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n^2}$ TIENE UNA GRÁFICA



YA QUE $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$

$$f_n(x) \begin{cases} <0 & \text{SI } x<-n \\ =0 & \text{SI } x=n \\ >0 & \text{SI } x>n. \end{cases}$$

VAMOS A CALCULAR LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE f

$$f_n'(x) = \frac{(x^2+n^2)-(x+n)2x}{(x^2+n^2)^2} = \frac{-x^2-2nx+n^2}{(x^2+n^2)^2}$$

$f_n'(x) = 0 \iff -x^2-2nx+n^2 = 0$ ECUACIÓN DE 2º GRADO

RESOLVEMOS $x^2+2nx-n^2=0$

$$x = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2+4n^2}}{2} = \frac{-2n \pm 2\sqrt{2}n}{2} = n(-1\pm\sqrt{2}).$$

ASÍ f TIENE UN MÍNIMO EN $-(1+\sqrt{2})n$

" f " MÁXIMO EN $(\sqrt{2}-1)n$.

AHORA $\left|f(-(1+\sqrt{2})n)\right| = \left|\frac{\cancel{-n}-\sqrt{2}n+\cancel{n}}{(1+\sqrt{2})^2n^2+n^2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Y $\left|f((\sqrt{2}-1)n)\right| = \left|\frac{\sqrt{2}n-\cancel{n}+\cancel{n}}{(\sqrt{2}-1)^2n^2+n^2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

LUEGO FIJANDO $\varepsilon>0$ EXISTE n_0 TAL QUE SI $n \geq n_0$

$$\Rightarrow \max\left(\frac{\sqrt{2}}{((1+\sqrt{2})^2+1)n}, \frac{\sqrt{2}}{((\sqrt{2}-1)^2+1)n}\right) \leq \varepsilon$$

Y ASÍ $|f_n(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$ LO QUE PRUEBA LA CONVERGENCIA UNIFORME DE f_n EN 0. EN TODO $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 2:

$$f(t) = \begin{cases} t e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE f ES POR DEFINICIÓN

$$\boxed{\hat{f}(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist}\, dt \underset{f=0 \text{ si } t<0}{=}$$

$$\int_0^{\infty} t e^{-2t} e^{-ist}\, dt = \int_0^{\infty} t\, e^{-(2+is)t}\, dt =$$

$$\underset{\text{PARTES}}{=} \left. -\frac{t\, e^{-(2+is)t}}{2+is} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{2+is} \int_0^{\infty} e^{-(2+is)t}\, dt$$

PARA $t=0$ LA PRIMERA FUNCIÓN SE ANULA Y

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t\, e^{-(2+is)t}}{2+is} = 0$$

$$= \frac{1}{2+is} \int_0^{\infty} e^{-(2+is)t}\, dt = \frac{1}{2+is} \left(\left. -\frac{e^{-(2+is)t}}{2+is} \right|_0^{\infty} \right.$$

$$= \boxed{\frac{1}{(2+is)^2}}$$

3)

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{t^2+1} \\ \lim_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{2}{\pi} \end{cases}$$

LA E.D.O $x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{t^2+1}$ ES UNA ECUACIÓN DE VARIABLES SEPARADAS. PARA RESOLVERLA

PONEMOS

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = \frac{1}{t^2+1}$$

E INTEGRAMOS

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)}\,dt = -\frac{1}{x(t)}$$

POR OTRO LADO

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{Arctan} t + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

LUEGO $-\dfrac{1}{x(t)} = \operatorname{Arctan} t + k \qquad k \in \mathbb{R}$

DESPEJANDO $\boxed{x(t) = \dfrac{1}{K - \operatorname{Arctan} t} \qquad k \in \mathbb{R}}$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

COMO $\lim_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{2}{\pi} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{K - \operatorname{Arctan} t} = \dfrac{1}{K - \pi/2}$

COMO $\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{1}{k - \pi/2}$ DESPEJANDO

$k - \pi/2 = \dfrac{\pi}{2}$ Y ASÍ $k = \pi$.

LUEGO $\boxed{x(t) = \dfrac{1}{\pi - \operatorname{Arctan} t}}$ ES LA SOLUCIÓN BUSCADA

PROBLEMA 4:

$$3x \equiv 8 \mod 7$$
$$x \equiv 5^{2021} \mod 6.$$

$\mathbb{Z}_7$ es un cuerpo, luego existe $3^{-1} \in \mathbb{Z}_7$

que es 5 $(3 \times 5 = 15 \equiv 1 \mod 7)$

Así $3x \equiv 8 \mod 7 \iff$

$$\boxed{x \equiv 8 \times 5 \equiv 5 \mod 7.}$$

Por otro lado $mcd(5,6) = 1$. Luego

$5^{\phi(6)} \equiv 1 \mod 6.$ (Teorema de Euler)

$\phi(6) = \phi(2)\phi(3) = 1 \times 2 = 2$

Luego $\boxed{5^{2021} = (5^2)^{1010} 5 \equiv 5 \mod 6}$

Así tenemos el problema equivalente

$x \equiv 5 \mod 7$

$x \equiv 5 \mod 6$

La solución única es $x \equiv 5$.

PROBLEMA 5: $(G: \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{14} +)$ 13 es primo

el orden de $G = 13 \times 14$ y como $mcd(13, 14) = 1$

G es cíclico.

Divisores de 13: 1 y 13

Divisores de 14: 1, 2, 7 y 14

- $(0,0)$ tiene orden 1
- $(1,0)$ tiene orden 13
- $(0,7)$ tiene orden 2
- $(0,2)$ tiene orden 7
- $(0,1)$ tiene orden 14
- $(1,1)$ tiene orden 13×14
- $(1,7)$ tiene orden 13×2
- $(1,2)$ tiene orden 13×7

1, 2, 7, 13, 14 y 13×14, 13×2, 13×7 son todos los divisores de 13×14

Por el teorema de Lagrange si $a \in G$

$$\operatorname{ord} a \mid \operatorname{ord} G.$$

Hemos visto por tanto que los órdenes posibles de los elementos de G son tantos como sus divisores, el orden G

Problema 6) $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x+1\rangle =$

$2^3 = 8$ elementos

$$= \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+x, x^2+x+1, x^2+1\}$$

Como $p(x) = x^3+x+1$ es de grado 3 y

$$p(0) = 1 \neq 0$$

$$p(1) = 1 \neq 0$$

es un polinomio irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$, por lo tanto $\mathbb{A}$ es un cuerpo.

Ahora $(1+x)^{185} = (1+x)^{7 \cdot 26+3} =$

$\mathbb{A}^*$ grupo multiplicativo de 7 elementos, y

$$\begin{array}{r|l} 185 & 7 \\ 45 & 26 \\ 3 & \end{array}$$

$$= \left((1+x)^7\right)^{26}(1+x)^3 = (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 =$$

$(1+x)^7 = 1$

$3 \equiv 1 \mod 2$

$$= 1+x+x^2+x^3 = \boxed{x^2}$$ Solución.

$x^3+x+1 = 0$