

EXAMEN DE CÁLCULO

8 de Julio de 2021.

1. Determinar los números reales que verifican $|x^2 - 1| \leq 1$.

2. Comprueba que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por recurrencia por

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{4-a_n} \end{cases}$$

es convergente. Calcula su límite.

3. Estudia la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

4. Calcula los correspondiente límite laterales y determina si la siguiente función es continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

5. Para la función definida por $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x}{2x^2 - x}$ determina su dominio, los puntos de corte con los ejes, si es par o impar, las posibles asíntotas, los puntos singulares o críticos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión. Con los datos obtenido dibuja un esbozo de la gráfica.

6. Utiliza la fórmula $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$, para calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \left(\sum_{k=1}^n (n^2 - k^2)^2 \right)$$

7. Estudia la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx.$$

8. Calcula el volumen de revolución que se construye al girar la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$, para $x \in [0, 2]$, alrededor del eje de las "x".

Para el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada ejercicio se resolverá en una cara.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir en los primeros 45 minutos.

Mira detrás las condiciones de la revisión

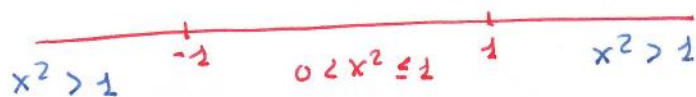
Revisión del examen:

- .- Las notas del examen estarán disponible el día 15 de Julio por la tarde (20h).
- .- **No será presencial la revisión.**
- .- Las soluciones del examen se podrán consultar en:
<http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-20-21/calculo/examenes/>
- .- Si un alumno está en desacuerdo con su nota deberá enviar un e-mail al coordinador de la asignatura (Cesar Ruiz e-mail: cruizb@mat.ucm.es), antes de las 12h del día 16 de Julio, indicando el motivo de su petición (problema o problemas de su desacuerdo).
- .- Los profesores correctores del examen se comprometen a contestar (por e-mail) a las peticiones de revisión antes de las 14h del día 19 de Julio.

No es obligatorio solicitar la revisión.

PROBLEMA 1:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1\}$$



- Si $x^2 \leq 1$ es necesario si $|x| \leq 1$, entonces

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \geq 0$$

y lo anterior: $1 \geq 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ lo cual es cierto

$$\text{Así } [-1, 1] \subseteq A$$

- Si $x > 1$ $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ y $1 \geq x^2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq x$

$$\text{Luego } (1, \sqrt{2}] \subseteq A$$

- Si $x < -1$ $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ y $1 \geq x^2 - 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x$

$$\text{Luego } [-\sqrt{2}, -1) \subseteq A$$

Con esto lo anterior

$$A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

PROBLEMA 2:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4 - a_n} \end{cases}$$

$$a_0 = 0 < a_1 = \frac{1}{4} < a_2 = \frac{1}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{15}$$

Probar que la sucesión es creciente (y por tanto positiva) y acotada. Por inducción.

Si es cierta, entonces probar que $a_n \leq 4$.

Para $0 < a_1 < a_2 < 4$, supongamos que $0 < a_{n-1} < a_n < 4$

$$\text{Luego } a_{n-1} - 4 < a_n - 4 < 0$$

$$\text{Luego } 0 < 4 - a_n < 4 - a_{n-1}$$

$$\text{y } 0 < \frac{1}{4 - a_{n-1}} = a_n < \frac{1}{4 - a_n} = a_{n+1}$$

Lo que prueba que (a_n) es creciente y positiva.

Si existe $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \geq 1} a_n$ ya que (a_n) es creciente.

$$\text{Así } a_n < l \quad \forall n \quad \text{y} \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 - a_n} = \frac{1}{4 - l}$$

$$\text{Luego } 4l - l^2 = 1 \Rightarrow l^2 - 4l + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{l = 2 + \sqrt{3}} < 4$$

$$\text{Si } a_n < 2 + \sqrt{3} \quad \text{entonces} \quad a_{n+1} = \frac{1}{4 - a_n} < \frac{1}{4 - (2 + \sqrt{3})} \leq 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Como } \frac{1}{4 - (2 + \sqrt{3})} \leq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 \leq (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

Luego (a_n) es creciente; $0 < a_n < 2 + \sqrt{3}$ Acotada y tiene límite $l = 2 + \sqrt{3}$

PROBLEMA 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Es una serie de términos positivos.
Vale la pena de considerar la cociente.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \\ &= \frac{3}{e} > 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie diverge.

PROBLEMA 4: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- si $x < 0$ $f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$ que es continua en x por ser combinación de funciones continuas en $x < 0$

- si $x > 0$ $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ que es continua en x por ser combinación de funciones continuas en $x > 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{0}{1+0} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} \stackrel{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1$

Como las límites laterales no coinciden y además $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$ f no es continua en $x=0$
 Así f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Problema 5) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x}{2x^2 - x} =$

$$= \frac{x(x^2 - 2x - 1)}{x(2x - 1)} = \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1}$$

$x^2 - 2x - 1$ evaluamos en $x = 1/2$ en la derivada
Así

donde $f = \mathbb{R} - \{1/2\}$

Límites $-\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1} = -\infty$

$-\lim_{x \rightarrow 1/2^-} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1} = \infty$

$-\lim_{x \rightarrow 1/2^+} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1} = -\infty$

$x = 1/2$ es una asíntota vertical

$-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1} = \infty$

Asíntotas oblicuas

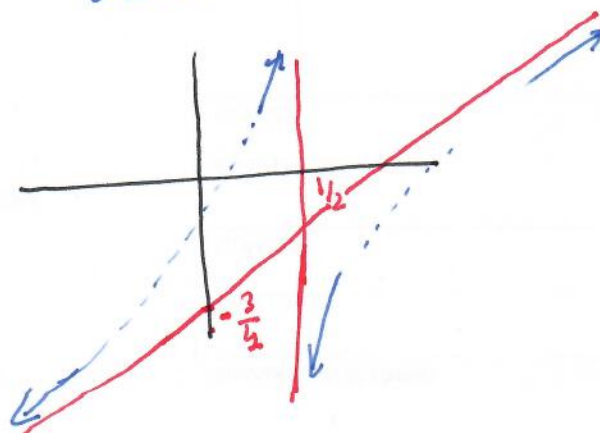
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x^2 - x} = 1/2$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - 1/2 x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1} - 1/2 x =$

$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 2x - 1 - x^2 + 1/2 x}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-3/2 x - 1}{2x - 1} =$

$= -3/4$

Así la recta $y = 1/2 x - 3/4$ es una asíntota oblicua también en ∞ como en $-\infty$



PROBLEMA 5: - Contes com L e JTS

$$f(x)=0 \quad (\Rightarrow) \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

- Contes com a Assintota Oblíqua

$$f(x) - (1/2 x - 3/2) = 0$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1} - 1/2 x + 3/2 &= \frac{x^2 - 2x - 1 - x^2 + 2x - 3/2}{2x - 1} \\ &= \frac{-7/2}{2x - 1} \neq 0 \end{aligned}$$

Logo não há corte com a Assintota Oblíqua
 Lo que não sugere que há raiz anterior
 às coordenadas

- Derivadas

derivadas

PARA FACILITAR O CÁLCULO

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 1 \\ - x^2 + 1/2 x \\ \hline -3/2 x - 1 \\ + 3/2 x - 3/2 \\ \hline -7/2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{y assim } f(x) &= \frac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1} = \frac{(2x - 1)(1/2 x - 3/2) - 7/2}{(2x - 1)} \\ &= (1/2 x - 3/2) - \frac{7/2}{2x - 1} \end{aligned}$$

- $f'(x) = 1/2 + \frac{7/2}{(2x - 1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - 1/2$

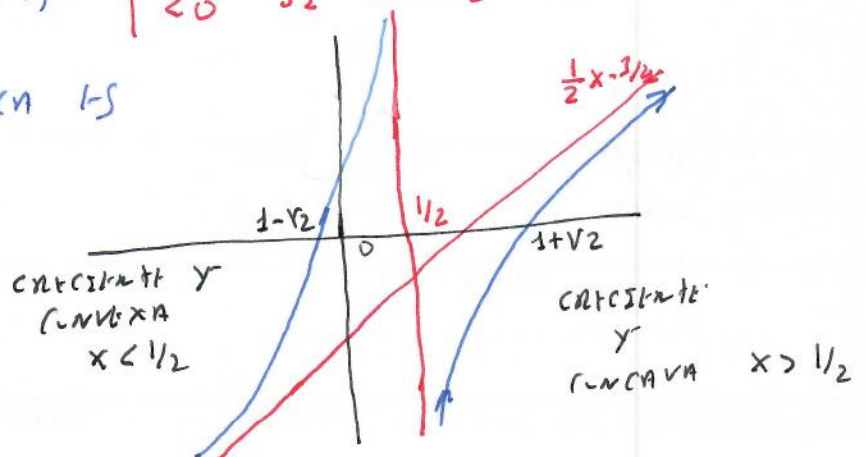
Logo a função é estritamente crescente, sem pontos de inflexão

- $f''(x) = -\frac{14}{(2x - 1)^3}$

$$\begin{cases} > 0 & \text{ss } x < 1/2 & \text{f convexa} \\ < 0 & \text{ss } x > 1/2 & \text{f concava} \end{cases}$$

- Logo a gráfica é

no há pontos de inflexão.



PROBLEMA 6:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \left(\sum_{k=1}^n (n^2 - k^2)^2 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(n^2 - k^2)^2}{(n^2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)^2 =$$

$$= \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx =$$

USANDO QUA:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

PODEMOS $f(x) = (1 - x^2)^2 = \int_0^1 x^4 - 2x^2 + 1 dx =$
R. MANO.

$$= \left. \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x \right|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

PROBLEMA 7:

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^r \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\pi/2}^r = \frac{2}{\pi}.$$

NOTA: COMO $\frac{1}{x^2}$ É INTEGRÁVEL EM $[\pi/2, \infty)$

TEMOS QUE $f(x) = \left| \frac{\sin x}{x^2} \right|$ É INTEGRÁVEL EM $[\pi/2, \infty)$

NOTA: A FUNÇÃO $\frac{\sin x}{x^2}$ É ABSOLUTAMENTE

INTEGRÁVEL E SEU VALOR INTEGRAL É:

OBSERVAÇÃO: $y^+(x) = \max \left\{ \frac{\sin x}{x^2}, 0 \right\}$ É CONTÍNUA E $y^+ \leq \frac{1}{x^2}$

$y^-(x) = \max \left\{ -\frac{\sin x}{x^2}, 0 \right\}$ É CONTÍNUA E $y^- \leq \frac{1}{x^2}$

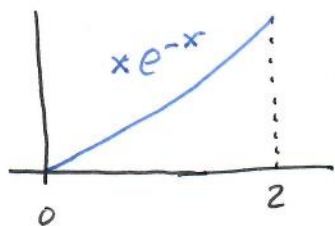
$y = y^+ + y^-$, AMBOS y^+ E y^- SÃO INTEGRÁVEIS

$$\frac{\sin x}{x^2} = y^+ - y^-, \quad \text{LUGO EXISTE} \quad \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \int_{\pi/2}^{\infty} y^+ - \int_{\pi/2}^{\infty} y^-.$$

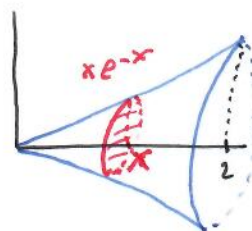
PROBLEM 8:

$$f(x) = x e^{-x} \quad x \in [0, 2]$$

Find the volume of the solid of revolution



6.5.2020



the area of the cross-section is $\pi (x e^{-x})^2$

the volume of the solid of revolution is

$$V = \int_0^2 \pi f^2(x) dx = \int_0^2 \pi x^2 e^{-2x} dx =$$

$$= \pi \left[x^2 \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^2 + \int_0^2 2x \frac{e^{-2x}}{2} dx \right] =$$

$$= \pi \left[-2e^{-4} + \int_0^2 x e^{-2x} dx \right] =$$

$$= -2\pi e^{-4} + \pi \left[x \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{e^{-2x}}{2} dx \right] =$$

$$= -2\pi e^{-4} - \pi e^{-4} + \pi \int_0^2 \frac{e^{-2x}}{2} dx =$$

$$= -3\pi e^{-4} + \pi \left(\frac{e^{-2x}}{-4} \Big|_0^2 \right) =$$

$$= -3\pi e^{-4} + \pi \left(-\frac{e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= -\pi e^{-4} \left[3 + \frac{1}{4} \right] + \frac{\pi}{4} = \pi \left[\frac{1}{4} - e^{-4} \frac{13}{4} \right] > 0$$

since, $\frac{1}{4} - e^{-4} \frac{13}{4} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2^4} \frac{13}{4} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{13}{16} \right) > 0.$
 $3 > e^2$