AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

La **Transformada de Laplace** es un mecanismo para transformar funciones reales de una variable real. Este proceso es especialmente útil para resolver E.D.O. lineales de segundo orden, así como sistemas lineales de E.D.O. (como los que pueden aparecer en los **circuitos multimalla**).

Definición 1. *Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ se llama **Transformada de Laplace** de f a la función $Lf : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

para todo $s \geq 0$ donde la integral anterior exista.

Vamos a ver como se calculan las transformadas de Laplace de las funciones más 'corrientes'.

Ejemplo 1. *Sea $f(t) \equiv 1$, la función constantemente igual a 1. Su transformada de Laplace es*

$$Lf(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix} = \lim_{t\to\infty} e^{-st} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

Ejemplo 2. *Sea $f(t) = t$. Usando el método de integración por parte vemos que su transformada de Laplace es*

$$Lf(s) = \int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{te^{-st}}{-s}\Bigg|\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}.$$

Ejemplo 3. *Sea $f(t) = e^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0$. Usando el **Ejemplo 1** vemos que su transformada de Laplace es*

$$Lf(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}dt = \frac{1}{s+\alpha}.$$

Ejemplo 4. *Sea $f(t) = e^{rt}$ con $r > 0$. Usando la integración por partes y el* ***Ejemplo 1*** *vemos que su transformada de Laplace es*

$$\begin{aligned} Lf(s) &= \int_0^\infty e^{rt}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-r)t}dt \\ &= \frac{e^{-(s-r)t}}{-(s-r)}\Bigg|\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix} = \begin{cases} \infty & si \quad s \le r \\ \frac{1}{s-r} & si \quad s > r. \end{cases} \end{aligned}$$

Este es un primer ejemplo donde vemos que no siempre existe la transformada de Laplace o al menos en todo el dominio $[0, \infty)$.

Los ejemplos anterior nos sugieren el siguiente resultado.

Proposición 1. *Si existe la transformada de Laplace de una función g y se define $f(t) = e^{-\alpha t}g(t)$, entonces la transformade de Laplace de f es $Lf(s) = Lg(s+\alpha)$, para todo $s \ge -\alpha$.*

Demostración: La prueba es hacer las cuentas de los dos ejemplos anteriores.

$$Lf(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}g(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty g(t)e^{-(s+\alpha)t}dt = Lg(s+\alpha).$$

Como existe $Lg(s)$ para todo $s \ge 0$, entonces si $s \ge -\alpha$, se sigue que existe $Lg(s+\alpha) = Lf(s)\Box$

Ejemplo 5. *Sea $f(t) = \operatorname{sen}(\beta t)$. Usando la integración por partes dos veces vemos que su transformada de Laplace es*

$$\begin{aligned} Lf(s) = \int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t)e^{-st}dt &= \frac{\operatorname{sen}(\beta t)e^{-st}}{-s}\Bigg|\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix} + \frac{\beta}{s}\int_0^\infty \cos(\beta t)e^{-st}dt \\ &= \frac{\beta}{s}\left[\frac{\cos(\beta t)e^{-st}}{-s}\Bigg|\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix} - \frac{\beta}{s}\int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t)e^{-st}dt\right] \\ &= \frac{\beta}{s^2} - \frac{\beta^2}{s^2}\int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t)e^{-st}dt. \end{aligned}$$

Ahora despejando la integral que nos interesa

$$(1 + \frac{\beta^2}{s^2})\int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t)e^{-st}dt = \frac{\beta}{s^2}$$

y así

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t)e^{-st}dt = \frac{\beta}{s^2}(1 + \frac{\beta^2}{s^2})^{-1} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}.$$

El ejemplo y la proposición anteriores nos permiten calcular de forma más rápida los ejemplos que siguen.

Ejemplo 6. *Sea $f(t) = \cos(\beta t)$. Usando la integración por partes vemos que su transformada de Laplace es*

$$Lf(s) = \int_0^\infty \cos(\beta t)e^{-st}dt = \frac{\cos(\beta t)e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty - \frac{\beta}{s}\int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t)e^{-st}dt$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s}\frac{\beta}{s^2+\beta^2} = \frac{s}{s^2+\beta^2}.$$

Ejemplo 7.

$$L[e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)](s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \text{ y } L[e^{-\alpha t}\cos(\beta t)](s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Consideramos ahora las funciones **hiperbólicas**

- $\operatorname{senh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ el **seno hiperbólico**; y
- $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ el **seno hiperbólico**.
- Observemos que $\operatorname{senh}' t = \cosh t$ y que $\operatorname{senh}'' t = \cosh' t = \operatorname{senh} t$. Es fácil ver también que $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.

Para estas funciones, en el caso del seno hiperbólico integrando dos veces por parte como en el ejemplo 6 y procediendo después como en los ejemplos 7 y 8 tenemos que

Ejemplo 8.

$$L[\operatorname{senh}(\beta t)](s) = \frac{\beta}{s^2-\beta^2} \qquad y \qquad L[\cosh(\beta t)](s) = \frac{s}{s^2-\beta^2};$$

$$L[e^{-\alpha t}\operatorname{senh}(\beta t)](s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2-\beta^2} \text{ y } L[e^{-\alpha t}\cosh(\beta t)](s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2-\beta^2}$$

Otro resultado interesante para calcular transformadas de Laplace es el siguiente.

Proposición 2. *Si f es una función para la que existe su transformada de Laplace y está es una función n-veces derivable en s se tiene que*

$$L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n Lf(s)}{ds^n} = (-1)^n (Lf)^{n)}(s).$$

Demostración: Probamos a continuación el caso $n = 1$, después se procede por inducción.

$$L[tf(t)](s) = \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty -f(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt$$

en ciertas condiciones (sobre la función f que verifican las funciones que aparecen en ingeniería) ocurre que

$$= -\frac{d}{ds}[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt] = (-1)(Lf)'(s)\square$$

Usando este resultado, tenemos que

Ejemplo 9.

$$L[t\,\mathrm{sen}(\beta t)](s) = \frac{2s\beta}{(s^2+\beta^2)^2} \qquad y \qquad L[t\cos(\beta t)](s) = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}.$$

Todo la anterior y algo más lo resumimos en la siguiente **tabla de Transformadas de Laplace** que será muy útil sobre todo en el llamado **problema inverso** que se nos va a presentar un poco más adelante.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Las siguientes funciones tienen por Transformadas de Laplace las funciones en s que figuran a su lado:

(1) Si $f(t)=1$, entonces $Lf(s)=\frac{1}{s}$
(2) Si $f(t)=\mathrm{sen}(\alpha t)$, entonces $Lf(s)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
(3) Si $f(t)=\cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s)=\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
(4) Si $f(t)=e^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s)=\frac{1}{s+\alpha}$
(5) Si $f(t)=\mathrm{senh}(\alpha t)$, entonces $Lf(s)=\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
(6) Si $f(t)=\cosh(\alpha t)$, entonces $Lf(s)=\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
(7) Si $f(t)=e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$, entonces $Lf(s)=\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
(8) Si $f(t)=e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$, entonces $Lf(s)=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
(9) En general, dada $f(t)$, entonces $L[e^{-\alpha t}f(t)](s)=Lf(s+\alpha)$
(10) Si $f(t)=t^n$, entonces $Lf(s)=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, $(*)$
(11) Si $f(t)=te^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s)=\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
(12) Si $f(t)=t\,\mathrm{sen}(\alpha t)$, entonces $Lf(s)=\frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$
(13) Si $f(t)=t\cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s)=\frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$
(14) En general, dada $f(t)$, entonces $L[t^n f(t)](s)=(-1)^n\frac{\partial^n Lf(s)}{\partial s^n}$

$(*)$ La función Γ es la función la función Gamma de Euler. Esta función se define por

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

Es claro que $\Gamma(1)=1$. También se prueba que $\Gamma(2)=1$ y que $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$. Así se deduce que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $\Gamma(n+1)=n!$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es