ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Un ejemplo geométrico

Ejercicio 1. *Queremos encontrar una curva del plano que pase por el punto* $(0,2)$ *y cuya recta tangente en cualquiera de sus puntos tenga por pendiente la ordenada del punto aumentada en tres unidades.*

Si suponemos que nuestra curva viene dada por la gráfica de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y como la recta tangente a una gráfica por el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$r(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0),$$

entonces la función f que buscamos tiene que verificar las condiciones:

$$\begin{cases} f'(x) &= f(x)+3 \\ \\ f(0) &= 2 \end{cases}$$

Estamos ante una ecuación diferencial junto a un dato inicial (más adelante a un problema como este le llamaremos **problema de Cauchy**)

Observación 1. *Con los datos que tenemos,* $f(0) = 2 > 0$ *y* $f' = f+3$*, deducimos que* f' *es continua por serlo* f*. Además* f' *tiene que ser positiva si* $x > 0$*, luego* f ***tiene que ser creciente.*** *Derivando,* $f'' = f' > 0$*, luego* f ***tiene que ser además convexa****. Con todo ello vemos que la función que buscamos tendrá la forma*

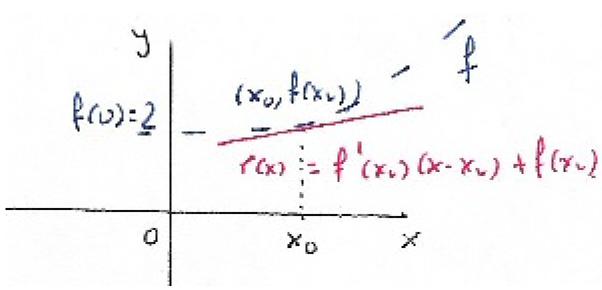

Figura 1. Boceto de la gráfica de f.

Un problema geométrico nos ha llevado a plantear una Ecuación Diferencial. Vamos a ver como resolverla empleando una técnica que más adelante llamaremos "truco" de las variables separadas. Se sustenta las siguientes reglas vistas en primer curso.

La Regla de la Cadena: $(f \circ g)' = f'(g)g'$

La Regla de Sustitución: Si $F = \int f(x)dx$, entonces $\int f(g(x)g'(x)dx = F(g(x))$.

Solución: Tenemos la ecuación $f'(x) = f(x)+3$. Despejamos $\dfrac{f'(x)}{f(x)+3} = 1$ e integramos

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)+3}dx = \int dx = x + K.$$

Por otro lado, usando la fórmula de sustitución

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)+3}dx = \ln(|f(x)+3|) \qquad (*)$$

Así

$$\ln(|f(x)+3|) = x + K,$$

luego

$$|f(x)+3| = e^{x+K} = e^K e^x.$$

Por tanto

$$f(x) = Qe^x - 3, \qquad \text{donde} \qquad Q = \pm e^K \in \mathbb{R}.$$

Esto es una **familia de funciones o de curvas del plano**. De ella nos interesa aquella que verifica $f(0) = 2$, luego

$$f(0) = Qe^0 - 3 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad Q = 5.$$

Así la **única solución** de nuestro problema es

$$f(x) = 5e^x - 3 \qquad \square$$

Observa que esta función se corresponde con el boceto dibujado anteriormente.

Observación 2. *A resolver una ecuación deferencial se le llama* ***integrar*** *la ecuación.* $(*)$ *nos dice el porqué del nombre.*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`