ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Descenso del Paracaidista.

Las ecuaciones diferenciales aparecen de forma natural en muchos problemas de la **Física**. Por ejemplo, un paracaidista cae por la acción de la gravedad y solo es frenada su caída por una fuerza de rozamiento. ¿Podemos conocer cuál es el movimeinto de caída? (Mira el dibujo)

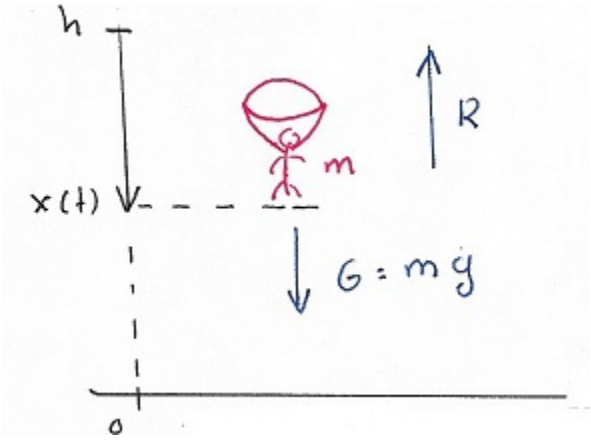

FIGURA 1. Descenso del Paracaidista.

En este ejemplo deberíamos conocer:

- m la masa del paracaidista;
- h la altura del lanzamiento;
- $x(t)$ la altura del paracaidista en el momento t (función incógnita), claro, $x(0) = h$ y $x = 0$ el momento que toda tierra;
- $g \simeq 10m/s^2$ la aceleración de la gravedad;
- G fuerza de gravedad;
- R fuerza de resistencia (o de rozamiento del aire).

También deberíamos conocer las **leyes físicas** (en este caso de la mecánica) que rigen este proceso:

- cerca de la Tierra se supone g constante y $G = mg$;
- las fuerzas de rozamiento solo aparecen cuando hay movimiento (velocidad $x'(t) \neq 0$); en este caso la consideramos

$$R = K(x'(t))^2, \qquad K > 0;$$

(aunque podría ser de otro tipo);

- la **segunda ley de Newton** del movimiento (mira el Apéndice correspondiente).

Así según la segunda ley de Newton, la resultante o suma de fuerzas del sistema (en este caso dos)

$$-G + R = -mg + K(x'(t))^2$$

(observa que $x(t)$ decrece de h a 0, el signo de G y F son opuestos por que tiene distinta dirección), la resultante tiene que ser

$$mx''(t) = -mg + K(x'(t))^2 \qquad \Leftrightarrow_{\rho=K/m} \qquad x''(t) = -g + \rho(x'(t))^2,$$

una ecuación diferencial donde solo aparece la derivada y derivada segunda de la función incógnita x. Además sabemos que $x(0) = h$ y que en el momento de saltar $x'(0) = 0$. Si escribimos $y = x'$ tenemos el **problema de Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(t) &= -g + \rho y^2(t) \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Solución: Como en el ejemplo anterior, ponemos

$$\frac{y'(t)}{-g + \rho y^2(t)} = 1.$$

Integrando

$$t + M = \int \frac{y'(t)}{-g + \rho y^2(t)} dt, \qquad \text{donde} \qquad M \qquad \text{es una constante.}$$

Usando el cambio de variable $u = y(t)$

$$\int \frac{1}{\rho} \frac{du}{\frac{-g}{\rho} + u^2} = \frac{1}{\rho} \int \frac{du}{(u - \sqrt{\frac{g}{\rho}})(u + \sqrt{\frac{g}{\rho}})} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\rho g}} \int \frac{1}{(u - \sqrt{\frac{g}{\rho}})} - \frac{1}{(u + \sqrt{\frac{g}{\rho}})} \, du =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\rho g}} \left(\ln |u - \sqrt{\frac{g}{\rho}}| - \ln |u + \sqrt{\frac{g}{\rho}}| \right) = \frac{1}{2\sqrt{\rho g}} \ln \left(\frac{|u - \sqrt{\frac{g}{\rho}}|}{|u + \sqrt{\frac{g}{\rho}}|} \right).$$

De lo que se sigue que

$$t + M = \frac{1}{2\sqrt{\rho g}} \ln \left(\frac{|y(t) - \sqrt{\frac{g}{\rho}}|}{|y(t) + \sqrt{\frac{g}{\rho}}|} \right).$$

Como $y(0) = 0$, sustituyendo en la ecuación anterior se sigue que $M = 0$. Ahora despejando

$$\ln\left(\frac{|y(t) - \sqrt{\frac{g}{\rho}}|}{|y(t) + \sqrt{\frac{g}{\rho}}|}\right) = 2\sqrt{\rho g}t$$

y

$$\frac{|y(t) - \sqrt{\frac{g}{\rho}}|}{|y(t) + \sqrt{\frac{g}{\rho}}|} = e^{2\sqrt{\rho g}t}.$$

Como $y(0) = 0$, al menos al principio del movimiento, tenemos que

$$\sqrt{\frac{g}{\rho}} - y(t) = e^{2\sqrt{\rho g}t}(y(t) + \sqrt{\frac{g}{\rho}})$$

y despejando $y(t)$

$$y(t) = -\frac{e^{2\rho t} - 1}{e^{2\rho t} + 1}\sqrt{\frac{g}{\rho}}.$$

Así,

$$x'(t) = -\frac{e^{2\sqrt{\rho g}t} - 1}{e^{2\sqrt{\rho g}t} + 1}\sqrt{\frac{g}{\rho}} \longrightarrow_{t\to\infty} -\sqrt{\frac{g}{\rho}} = -\sqrt{\frac{mg}{K}},$$

la velocidad de caida es negativa (claro , x es decreciente) y se estabiliza cuanto t es grande. La constante K, relativa al rozamiento, va a depender del paracaidas, podemos hacerla grande para que para dada una masa m la velocidad de caida sea pequeña.

Por último para conocer el movimiento $x(t)$, tenemos que

$$\begin{cases} x'(t) &= -\frac{e^{2\sqrt{\rho g}t}-1}{e^{2\sqrt{\rho g}t}+1}\sqrt{\frac{g}{\rho}} \\ x(0) &= h \end{cases},$$

que se resuelve integrando

$$x(t) - h = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\int_0^t -\frac{e^{2\sqrt{\rho g}s} - 1}{e^{2\sqrt{\rho g}s} + 1}ds =$$

(el cambio de variable $u = e^{2\sqrt{\rho g}s}$ con $du = 2\sqrt{\rho g}e^{2\sqrt{\rho g}s}ds$

$$-\frac{1}{2\rho}\int_1^{e^{2\sqrt{\rho g}t}} \frac{u-1}{u+1}\frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2\rho}\int_1^{e^{2\sqrt{\rho g}t}} \frac{2}{u+1} - \frac{1}{u}\,du =$$

$$-\frac{1}{2\rho}\ln\left(\frac{(e^{2\sqrt{\rho g}t} + 1)^2}{4e^{2\sqrt{\rho g}t}}\right)$$

y así despejando ($\rho = \frac{K}{m}$)

$$x(t) = h - \frac{m}{2K}\ln\left(\frac{(e^{2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t} + 1)^2}{e^{2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t}}\right).$$

Para conocer el tiempo que tarda en llegar a tierra, tenemos que despejar t en

$$h = \frac{m}{2K} \ln \left(\frac{(e^{2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t} + 1)^2}{e^{2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t}} \right).$$

Si $B = e^{h\frac{2K}{m}}$ y $A = e^{2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t}$, resolvemos

$$B = \frac{(A+1)^2}{A} \qquad \Leftrightarrow \qquad A^2 + (B-2)A + 1 = 0.$$

Encontrado A

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{Kg}} \ln A \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es