ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La ecuación Logística.

En el estudio de poblaciones, el crecimiento de poblaciones, también aparecen de forma natural las ecuaciones diferenciales.

Consideramos $x(t)$ el número de individuos de una población en el momento t; puedes ser bacterias, conejos o humanos. $x(t)$ **no** es un entero sino que asumimos que $x \in \mathbb{R}$ (esto es una necesidad técnica si queremos usar el cálculo para modelizar este tipo de problemas). Ahora x', la derivada de x, es la velocidad a la que crece (o decrece) la población. Una primera hipótesis, si no hay restricciones al crecimeinto de los individual: alimentos siempre disponibles, no hay enfermedades o depredadores ...etc es que la variación de la población es proporcional al número de individuos. En términos matemáticos

$$x'(t) = Kx(t).$$

Esto es una **ecuación diferencial** (**lineal de primer orden** como clasificaremos más adelante).

Solución: Despejando e integrando, como en los ejemplos anteriores

$$x(t) = x_0 e^{Kt}.$$

Así vemos que $x(0) = x_0$, **población inicial** y que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty \qquad \text{(\textbf{crecimiento exponencial} o Malthusiano).}$$

Este modelo no parece muy realista ya que ninguna población cree indefinidamente. Si suponemos que los recursos disponibles o los impedimentos del medio donde viven la población (espacio, enfermedades, depredadores...etc) solo dan para que existan un máximo de M individuos, podemos suponer que el crecimiento de la población es proporcional al número de individuos como al número de los que falta por colmar la población, en terminos matemático:

$$x'(t) = Kx(t)(M - x(t)) = KMx(t) - Kx^2(t).$$

Esto es una ecuación diferencial (de primer orden), que independientemente de donde haya salido y de que modelice bien o no ciertos procesos, podemos analizar desde el punto de vista matemático.

$$x'(t) = ax(t) - bx^2(t) \qquad a, b > 0 \qquad\qquad \text{Ecuación Logística.}$$

Solución 1: $x'(t) = bx(t)(\frac{a}{b} - x(t))$. Despejando

$$\frac{x'(t)}{bx(t)(\frac{a}{b} - x(t))} = 1$$

e integrando

$$\int \frac{x'(t)}{bx(t)(\frac{a}{b} - x(t))} dt = t + K.$$

Para resolver la integral pendiente, usamos la regla de sustitución. Hacemos $u = x(t)$ y entonces

$$\frac{1}{b} \int \frac{1}{u(\frac{a}{b} - u)} du =$$

descomponiento en fracciones simples

$$\frac{1}{b}\frac{b}{a} \int \frac{1}{u} + \frac{1}{\frac{a}{b} - u} du = \frac{1}{a}[\ln|u| - \ln|\frac{a}{b} - u|] = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x(t)}{\frac{a}{b} - x(t)} \right| .$$

Luego

$$\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x(t)}{\frac{a}{b} - x(t)} \right| = t + K$$

Despejando (abusando de notación ponemos $K = \pm e^{aK}$)

$$\frac{x(t)}{\frac{a}{b} - x(t)} = Ke^{at} \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \frac{a}{b}Ke^{at} - Ke^{at}x(t)$$

y así

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b}Ke^{at}}{1 + Ke^{at}} \quad \longrightarrow_{t\to\infty} \quad \frac{a}{b}$$

Obsevemos además que $x = 0$ y $x = \frac{a}{b}$ son dos soluciones estacionarias. De forma gráfica:

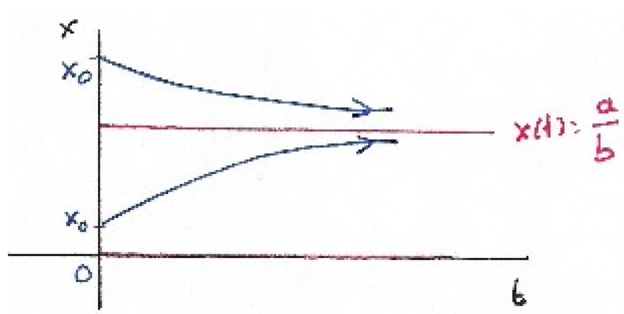

FIGURA 1. Soluciones de la Ecuación Logística.

Solución 2: La ecuación logistica $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$ la podemos ver como una **ecuación de Bernoulli** (ya veremos que son este tipo de ecuaciones) y resolverla mediante el cambio de variable

$$v(t) = \frac{1}{x(t)} \qquad x \neq 0$$

y así
$$v'(t) = \frac{-x'(t)}{x^2(t)} = \frac{-ax(t) + bx^2(t)}{x^2(t)} = -av(t) + b.$$
Esta ecuación diferencial
$$v'(t) = -av(t) + b$$
es lo que llamaremos una **ecuación lineal de primer orden no homogénea**. Esta ecuación en concreto la podemos resolver despejando,
$$\frac{v'(t)}{-av(t) + b}$$
e integrando para obtener (abusando de notación)
$$v(t) = Ke^{-at} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}(Ke^{-at} + 1).$$
Y por tanto
$$x(t) = \frac{b}{a}\frac{1}{Ke^{-at} + 1} = \frac{\frac{a}{b}Ke^{at}}{1 + Ke^{at}},$$
el mismo resultado que vimos anteriormente.

Modificación de la ecuación Logística.

Supongamos que en nuestro modelo de poblaciones la proporcionalidad del modelo varia con el tiempo de forma que tenemos la ecuación
$$x'(t) = \frac{bx(t)(\frac{a}{b} - x(t))}{t + 1}$$
Despejando
$$\frac{x'(t)}{bx(t)(\frac{a}{b} - x(t))} = \frac{1}{t + 1}$$
e integrando
$$\int \frac{x'(t)}{bx(t)(\frac{a}{b} - x(t))} dt = \ln(t + 1) + K.$$
Usando el cálculo de la primera **Solución**,
$$\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x(t)}{\frac{a}{b} - x(t)} \right| = \ln(t + 1) + K.$$
Si de nuevo abusamos de notación $K = \ln K$
$$\frac{x(t)}{\frac{a}{b} - x(t)} = K(t + 1)^a$$
y despejando
$$x(t) = \frac{a}{b}\frac{K(t + 1)^a}{1 + K(t + 1)^a} \quad \longrightarrow_{t\to\infty} \frac{a}{b} \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es