ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

¿Qué es una Ecuación Diferencial?

Una **ecuación** (igualdad) cuya incógnita es una función .....

Ejemplo 1. *Una ecuación **no** diferencial es*

$$\ln(f(t)+1) = f^2(t)+1.$$

Aquí la incógnita $f(t)$ es una función que como tal no juega ningún papel. La podemos sustituir por $y = f(t)$ y resolver

$$\ln(y+1) = y^2+1.$$

....y en la cuál además aparece la derivada o derivadas de la función incógnita es lo que llamamos una **ecuación diferencial**.

Ejemplo 2.

- $x(t) = x'(t)$ *(una función igual a su derivada).*
- $x(t) = (x'(t))^2$ *(una función igual al cuadrado de su derivada).*
- $x(t) = 2x''(t)$ *(una función igual a dos veces su segunda derivada).*
- *En general* $x'(t) = f(t, x(t))$ *(donde f es una función de dos variables).*

Observación 1. *Nosotros sabemos resolver:*

- *la ecuación **lineal** de primer grado* $ax+b=0$;
- *la ecuación de segundo grado* $ax^2+bx+c=0$;
- *la ecuación de tercer y cuarto grado con las fórmulas de Cardano;*
- *¿la ecuación de quinto grado y grados superiores?*
- *un sistema de ecuaciones **lineales**;*
- *en general el Teorema de Bolzano nos dice **si** una ecuación de la forma $f(x) = 0$, con f función continua, **tiene solución**; incluso nos dice como aproximarla.*

¿Como se resuelve una ecuación difencial? Como en el caso de las ecuaciones, a secas, podemos esperar resolver las **ecuaciones diferenciales lineales** (ya veremos lo que son). Podremos dar métodos de solución de algún tipo particular de ecuaciones, pero en general nos tendremos que conformar con dar un **Teorema de Existencia** de

soluciones y algún método de aproximación de soluciones (**métodos numéricos** que no vemos en este curso).

Demostración: La ecuación diferencial más sencilla es $x'(t) = x(t)$. Una solución ¡a ojo! es conocida. $x(t) = e^t$, pero también

$$x(t) = Ke^t \qquad \text{para toda constante} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Es más, estas son las únicas funciones que verifican esa ecuación diferencial. Claro, supongamos que $y'(t) = y(t)$, entonces si definimos $h(t) = y(t)/e^t$ y derivamos

$$h'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{e^{2t}} = 0.$$

Así, por el Teorema del Valor Medio, $h(t) = K$ para alguna constante K y despejando $y(t) = Ke^t$.

La **solución** de esta ecuación diferencial es **una familia de curvas**. Se pueden representar:

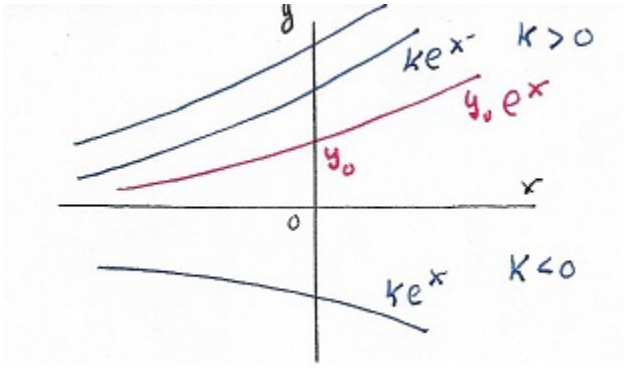

FIGURA 1. Familia de curvas solución de $x' = x$

Si fijamos un dato inicial $x(0) = y_0$, entonces solo existe una única curva $x(t) = Ke^t$ que satifaga $x(0) = y_0 = K$, la solución

$$x(t) = y_0e^t$$

(mira la figura).

Observación 2. *Veremos que esto es lo habitual. Una ecuación diferencial tiene por solución una familia de curvas y si fijamos un dato adicional más (dato inicial) entonces solo una de las curvas de la familia verifica esa condición adicional.*

Antes de dar una Teoría sobre las ecuaciones diferenciales deberíamos preguntarnos si esto responde a una curiosidad ¡encontar una función igual a dos veces su derivada segunda $x(t) = 2x''(t)$, por ejemplo; o si bien hay razones con más peso para ello.

En primer lugar vamos a dar toda una serie de ejemplos en los que a través de ecuaciones diferenciales se pueden resolver problemas o modelizar situaciones de distinta índole.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es