EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

19 de Enero de 2022.

1.- Dada la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n(1-x)^n$:

1) Calcula el valor máximo de la función $x(1-x)$ en $[0,1]$.
2) Usa esta información para probar la convergencia uniforme de la serie en $x \in [0,1]$ (ten en cuenta el criterio de Weierstrass).

2.-Sea $f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si} \quad x \in [0,\pi] \\ x + \pi & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0) \end{cases}$. Se considera la función

$$g(x) = \operatorname{sen} 3x \; + \; f(x) \qquad \text{para} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Calcula la serie de Fourier de la función g.

3.- Resuelve el problema de Cauchy $\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) = t^2 + 3 \\ x(0) = 3, \quad x'(0) = 7. \end{cases}$

4.- Encuentra, si es posible, x tal que $2x \equiv 5 \bmod 7$ y $3x \equiv 4 \bmod 8$.

5.- Consideramos el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_5[x]$. Calcula el máximo común divisor mónico de los polinomios $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$ y $g(x) = x^2 + x + 1$. Escribe el m.c.d(f,g) mónico de la forma $a(x)f(x) + b(x)g(x)$ con $a, b \in \mathbb{Z}_5[x]$.

6.- Dado el conjunto $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x] / < x^2 + x + 1 >$:

a) Indica razonadamente si es un cuerpo, con las operaciones suma y producto en congruencias, y calcula su cardinal.

b) Calcula el inverso de $[x+1]^{4490}$ en $\mathbb{K}$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 2h 55' horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

A LAS 11H 55' TODOS DEBEMOS ESTAR FUERA DEL AULA

Revisión del examen: No presencial.

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-20-21/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/

.- Si un alumno está en desacuerdo con su nota deberá enviar un e-mail a su profesor, al menos 24 horas antes de la revisión, indicando el motivo de su petición.

.- El día y a la hora de la revisión el alumno deberá estar pendiente de que el profesor se ponga en contacto con él.

La revisión del examen se efectuará el día 1 de Febero a las 16 h. No es obligatorio solicitar la revisión.

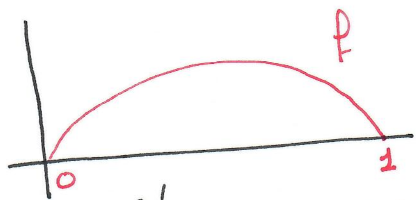
EXAMEN AM

EJERCICIO 1 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n (1-x)^n.$

1) En primer lugar vamos a acotar la función

$f(x) = x(1-x) \quad x \in [0,1]$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ y $f(x) = 0$ si y sólo si $x=0$ ó $x=1$



Por otro lado $f'(x) = (1-x) - x = 1-2x$

Luego $f'(x)=0 \iff x = 1/2$; $f(1/2) = \frac{1}{4}$

es un máximo ya que $f'(x) = 1-2x \begin{cases} >0 & \text{si } x<1/2 \\ <0 & \text{si } x>\frac{1}{2} \end{cases}$

Así $|f(x)| \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in [0,1]$.

2) La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n (1-x)^n \quad x \in [0,1]$

está formada por las funciones

$f_n(x) = n x^n (1-x)^n = n[x(1-x)]^n$

Luego $|f_n(x)| \leq n[x(1-x)]^n \underset{\text{usando 1)}}{\leq} \frac{n}{4^n} \quad \forall x \in [0,1]$

Ahora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ es convergente (por ejemplo, usando el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^{n+1}} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{4} < 1$)

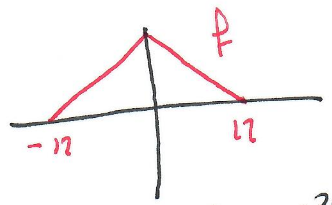
Luego el criterio de Weierstrass nos dice que la serie de funciones converge uniformemente a su límite puntual en todo $[0,1]$.

EXAMEN AM

EJERCICIO 2

$$g(x) = \operatorname{sen} 3x + f(x) \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in [0,\pi] \\ x + \pi & \text{si } [-\pi, 0] \end{cases}$$

LA FUNCIÓN f



ES UNA FUNCIÓN PAR, QUE DEBEMOS TOMAR 2π-PERIÓDICA.

OBSERVEMOS QUE SI $g = h_1 + h_2$ con funciones sus coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_1(x)\cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_2(x)\cos nx\, dx$$

LO QUE HACEN QUE a_n SEAN LA SUMA DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE h_1 y h_2.

LO MISMO PARA LOS b_n.

ASÍ EN NUESTRO CASO $g(x) = \operatorname{sen} 3x + f(x)$

•) LA SERIE DE FOURIER DE $\operatorname{sen} 3x$ ES ELLA MISMA

••) LA SERIE DE FOURIER DE f, COMO f ES PAR, $b_n = 0$ PARA TODO n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\Big[\underbrace{2\pi \times \pi/2}_{\text{ÁREA DEL TRIÁNGULO}}\Big] = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)\cos nx \\ \text{PAR}}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx =$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\, dx}_{0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{PARTES}}}{=} -\frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{\frac{x \operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\, dx\Big]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\Big[\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\Big] = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\big[\cos n\pi - 1\big] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ PAR} \\ \frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ IMPAR} \end{cases}$$

•••) LA SERIE DE FOURIER DE f ES $\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$

LA SERIE DE FOURIER DE g ES $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\right) + \operatorname{sen} 3x.$

EXAMEN A.M.

EJERCICIO 3

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) = t^2 + 3 \\ x(0) = 3, \quad x'(0) = 7 \end{cases}$$

HOMOGÉNEA ASOCIADA: $x''(t) + 2x'(t) = 0$

EC CARACTERÍSTICA $\lambda^2 + 2\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda+2) = 0$

LUEGO $\lambda = 0$ Y $\lambda = -2$ SON SOLUCIONES DE LA EC CARACTERÍSTICA

SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA ASOCIADA

$$x(t) = k_1 + k_2 e^{-2t} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN PARTICULAR: COMO $f(t) = t^2 + 3$ ES UN POLINOMIO Y $\lambda = 0$ ES RAÍZ DE LA CARACTERÍSTICA PROBAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL TIPO

$$y_0(t) = t(At^2 + Bt + C).$$

$$y_0'(t) = 3At^2 + 2Bt + C$$

$$y_0''(t) = 6At + 2B$$

ENTRANDO EN LA EDO $(6At + 2B) + 2(3At^2 + 2Bt + C) = t^2 + 3 \iff$

ASÍ $6At^2 + (6A + 4B)t + (2B + 2C) = t^2 + 3$

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 6A + 4B = 0 \\ 2B + 2C = 3 \end{cases} \qquad A = 1/6, \quad B = -1/4, \quad C = 7/4$$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN ES POR TANTO

$$\boxed{x(t) = \left(\tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{7}{4}t\right) + k_1 + k_2 e^{-2t}.}$$

$$x'(t) = \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}t + 7/4 - 2k_2 e^{-2t}$$

PARA QUE SE VERIFIQUEN LAS CONDICIONES INICIALES

$$k_1 = 3 + \tfrac{21}{8}$$

$$3 = x(0) = k_1 + k_2$$

$$7 = x'(0) = 7/4 - 2k_2 \quad \text{LUEGO} \quad k_2 = -\tfrac{1}{2}(7 - 7/4) = -\tfrac{21}{8}$$

LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY ES

$$\boxed{x(t) = \left(\tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{7}{4}t\right) + \tfrac{45}{8} - \tfrac{21}{8}e^{-2t}.}$$

EXAMEN AM

EJERCICIO 3

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) = t^2+3 \\ x(0) = 3 \qquad x'(0) = 7 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Usando la transformada de Laplace}}$

$$\mathcal{L}(x''(t)+2x'(t))(s) = \mathcal{L}x''(s) + 2\mathcal{L}x'(s) =$$

$$= \left(s^2 \mathcal{L}x(s) - x(0)s - x'(0)\right) + 2\left(s\mathcal{L}x(s) - x(0)\right) =$$

$$= (s^2+2s)\mathcal{L}x(s) - 3s - 13.$$

Por otro lado $\mathcal{L}(t^2+3)(s) \underset{\text{tablas}}{=} \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{3}{s}$

Igualando y despejando $\mathcal{L}x(s)$

$$\boxed{\mathcal{L}x(s)} = \frac{1}{s^2+2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{3}{s} + 3s + 13\right) = \frac{1}{s^2+2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{3s^2}{s^3} + \frac{3s^4}{s^3} + \frac{13s^3}{s^3}\right)$$

$$= \frac{1}{s^4}\frac{1}{(s+2)}\left[3s^4 + 13s^3 + 3s^2 + 2\right] \underset{\substack{\text{descomposición en} \\ \text{fracciones simples}}}{=}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^4} + \frac{E}{s+2} \underset{\text{ordenando}}{=} \frac{As^3(s+2)}{s^4(s+2)} + \frac{Bs^2(s+2)}{s^4(s+2)} + \frac{Cs(s+2)}{s^4(s+2)} + \frac{D(s+2)}{s^4(s+2)} + \frac{Es^4}{s^4(s+2)}$$

$E = 3 - \frac{45}{8}$

Ordenando y igualando

$$\begin{cases} A + E = 3 \\ 2A + B = 13 \\ 2B + C = 3 \\ 2C + D = 0 \\ 2D = 2 \end{cases} \Rightarrow D = 1, \quad C = -1/2, \quad B = \frac{7}{4}, \quad A = \frac{45}{8}$$

Solución en transformada

$$\boxed{= \frac{45}{8}\frac{1}{s} + \frac{7}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{1}{6}\frac{6}{s^4} - \frac{21}{8}\frac{1}{s+2}}$$

Mirando las tablas se tiene que, se sigue que:

$$x(t) = \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{7}{4}t\right) + \frac{45}{8} - \frac{21}{8}e^{-2t}$$

EXAMEN AM.

PROBLEMA 4 $\left\{\begin{array}{ll} 2x \equiv 5 & \text{mod } 7 \\ 3x \equiv 4 & \text{mod } 8 \end{array}\right.$

COMO 4 ES 2^{-1} mod 7 y
3 ES 3^{-1} mod 8

TENEMOS $x \equiv 5 \times 4 \equiv 6 \quad \text{mod } 7$

$x \equiv 4 \times 3 \equiv 4 \quad \text{mod } 8$

USANDO EL TEOREMA CHINO DEL RESTO

$$x \equiv 6 \times 8 \times 1 + 4 \times 7 \times 7 \equiv$$
$$\equiv 48 + 196 \equiv 244 \quad \text{mod } \operatorname{mcm}(7,8) = 56$$

LUEGO $244 = 56 \cdot 4 + 20$

$$\boxed{x \equiv 20 \quad \text{mod } 56}$$

COMPROBACION

$20 \equiv 6 \quad \text{mod } 7$

$20 \equiv 4 \quad \text{mod } 8$.

EXAMEN AM

PROBLEMA 5 $\quad mcd(x^4+x^3-x^2-x-2,\ x^2+x+1)$ en $\mathbb{Z}_5[x]$

ALGORITMO DE EUCLIDES

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x^3-x^2-x-2 & x^2+x+1 \\
\hline
-x^4-x^3-x^2 & x^2+3 \\
\quad 3x^2-x-2 & \\
\quad -3x^2-3x-3 & \\
\hline
\quad x &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+x+1 & x \\
\hline
-x^2 & x+1 \\
\quad x+1 & \\
\quad -x & \\
\hline
\quad 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x & 1 \\
\hline
-x & x \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

LUEGO $\quad 1 = mcd(x^4+x^3-x^2-x-2,\ x^2+x+1)$

TABLA

i					
r_i	$x^4+x^3-x^2-x-2$	x^2+x+1	x	1	0
q_i		x^2+3	$x+1$	x	
α_i	1	0	1	$-x-1$ $4x+4$	
β_i	0	1	$-x^2-3$ $4x^2+2$	$1-(x+1)(4x^2+2)$ x^3+x^2+3x+4	

ASI $\quad 1 = (4x+4)\cdot(x^4+x^3-x^2-x-2) + (x^3+x^2+3x+4)(x^2+x+1) =$

$= (4x^5+3x^4+2x^2+3x+2) + (x^5+2x^4+3x^2+2x+4) =$

$= 6 \equiv 1 \mod 5.$

COMPROBACIÓN MULTIPLICANDO

EXAMEN AM

PROBLEMA 6 $\quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+x+1\rangle.$

a) SEA $f(x) = x^2+x+1$

$f(0) = 1$

$f(1) = 3$

$f(2) = 4+2+1 = 2$

$f(3) = 9+3+1 = 3$

$f(4) = 16+4+1 = 1$

x^2+x+1 no tiene raíces en $\mathbb{Z}_5$ y como es de grado 2, es por tanto irreducible

- Así $\mathbb{K}$ es un cuerpo
- $|\mathbb{K}| = 5^2 = 25$ (tiene 25 elementos!)

b) El grupo multiplicativo $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}-\{0\}$ tiene 24 elementos, luego $\forall\, a \in \mathbb{K}^*$,

$$a^{24} = 1$$

Ahora

```
4490 |24
 209  187
  170
   02
```

Así $[x+1]^{4490} = [x+1]^{24\times 187+2} = \left([x+1]^{24}\right)^{187}[x+1]^2 =$

$= [x+1]^2 = [x^2+2x+1] = [\underbrace{x^2+x+1}_{0}]+[x] = [x]$

Tenemos, pues, que calcular el inverso de $[x]$ en $\mathbb{K}$. Puede usar la identidad de Bézout, pero en este caso es más sencillo

$$[x^2+x+1] = 0 \iff [x^2+x] = -1 = 4$$

Así $\quad [x][x+1] = 4$

$4\times 4 = 16$

$$[x]\, 4[x+1] = 1$$

$$\boxed{\left([x+1]^{4490}\right)^{-1} = ([x])^{-1} = 4[x+1] = [4x+4].}$$