AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

E.D.O. DE PRIMER ORDEN

Definición 1. *Sea f una función de dos variables*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [a,b]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \to & f(t,x) \end{array}$$

a) Una E.D.O. de primer orden es una ecuación del tipo

$$x'(t) = f(t,x(t)) \qquad (1).$$

b) Se llama ***problema de Cauchy*** *o de* ***valor inicial*** *a la ecuación con datos iniciales*

$$\left\{ \begin{array}{c} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{array} \right. \qquad (2)$$

donde $t_0 \in [a,b]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ son números previamente fijados.

Ejemplo 1. *Vimos en la introducción el ejemplo*

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(x) = y(x) + 3 \\ y(0) = 2. \end{array} \right. \qquad (3)$$

Aquí el papel de la función f lo hace $f(x,y) = y+3$, la función incógnita es $y(x)$ y x es la variable independiente (la t de la definición de arriba). $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$.

Definición 2. *a) Se llama solución de la ecuación* (1) *a toda función de una variable*

$$x : J \subset [a,b] \to \mathbb{R},$$

con dominio J, de modo que satisfaga la ecuación $x'(t) = f(t,x(t))$ para todo $t \in J$.
b) Si además $x(t_0) = x_0$, x es la solución del problema de Cauchy (2).

Ejemplo 2. *Consideremos el ejemplo* (3) *de arriba. En este caso sencillo, las siguientes cuentas son posibles.*

De la ecuación $y'(x) = y(x) + 3$ pasamos a $\dfrac{y'(x)}{y(x)+3} = 1$, ahora integramos en ambos lados de la igualdad respecto de x

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)+3}dx = \int 1dx;$$

haciendo las integrales queda

$$\log(|y(x)+3|) = x + K$$

donde K es una constante de integración. Ahora despejando la función y tenemos que

$$y(x) = \pm e^{x+K} - 3 = K'e^x - 3 \qquad \text{donde} \qquad K' = \pm e^K \ \ K \in \mathbb{R}.$$

Así para cada valor de $K' \in \mathbb{R}$, tenemos una solución distinta de la ecuación diferencial. Si además imponemos que $y(0) = 2$, entonces $2 = e^K e^0 - 3$ y despejando $K = \log 5$. Por tanto $y(x) = 5e^x - 3$ es la única solución del problema de Cauchy (3).

Observación 1. *Una ecuación diferencial no tiene por que tener una única solución. Suele ser única si imponemos algún tipo de condición adicional como las condiciones iniciales de un problema de Cauchy.*

El siguiente Teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales nos puede ayudar a entender mejor la observación anterior, aunque su demostración está fuera de nuestro alcance.

Teorema 1. *Dada una ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ y dos valores $t_0 \in [a,b]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$,*
a) si la función f es continua en un entorno del punto (t_0, x_0), entonces la ecuación diferencial (1) *al menos tiene una solución (local).*
b) si la función f tiene derivadas parciales continuas en un entorno del punto (t_0, x_0), entonces el problema de Cauchy (2) *tiene un única solución.*

En los ejemplos que irán apareciendo veremos como una ecuación diferencial define toda una familia de funciones que son soluciones de la misma y que cuando fijamos unas condiciones iniciales, entonces solo una función de la familia de soluciones verifica esta nueva condición.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es