ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ecuación del péndulo sin rozamiento.

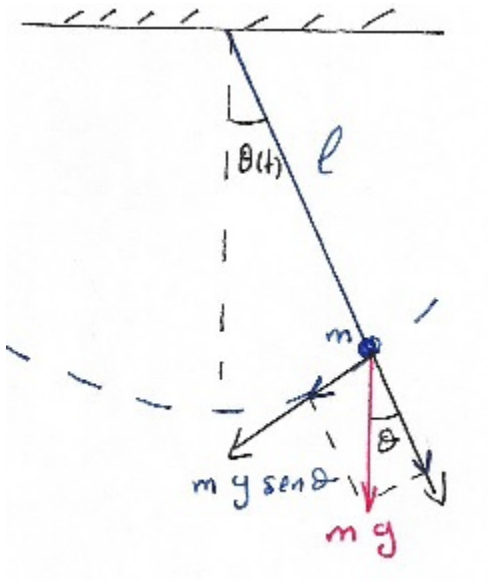

FIGURA 1. Péndulo sin rozamiento.

Condideramos un péndulo como un punto material de masa **m** suspendido de una cuerda de longitud **l** cuyos movimientos tienen lugar a los largo de una circunferencia del plano (no consideramos que haya fuerzas de rozamiento).

- $\theta(t)$ es la abertura del péndulo (ángulo medido en radianes) en el momento t.
- s(t) es la longitud de arco recorrido en el momento t.

Como el ángulo está dado en radianes, entonces le arco viene dado por

$$s(t) = l\theta(t).$$

La única fuerza que hace que haya movimiento es la componente tangencial de la fuerza de gravedad (que supondremos constante g), según se ve en el dibujo. Ahora la segunda ley de Newton nos dice que

$$ms''(t) = ml\theta''(t) = -mg \operatorname{sen} \theta(t),$$

(la fuerza es de sentido opuesto al movimiento) es decir

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta(t).$$

Mira al final la forma precisa de llegar a esta ecuación. Observemos que :

- es una **ecuación diferencial de segundo orden** (ya que aparece en la ecuación la derivadas segunda de la incógnita);
- es una ecuación del tipo $\theta''(t) = F(\theta(t))$.

¿Como podríamos resolver esta ecuación? Tenemos varias estrategias.

Solución 1. Si tenemos $x''(t) = F(x(t))$, multiplicando por x', si no es nula, tenemos

$$x'(t)x''(t) = x'(t)F(x(t).$$

Integrando, si $G = \int F$, llegamos a que

$$\frac{(x'(t))^2}{2} = G(x(t)) + K \qquad \Leftrightarrow \qquad x'(t) = \pm\sqrt{2G(x(t)) + K}.$$

Esta nueva ecuación diferencial es del tipo $x'(t) = H(x(t))$, que ya sabemos integrarla.

En nuestro problema del péndulo,

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\theta')^2(t) = \frac{2g}{l}(\cos\theta(t) + K).$$

Luego

$$(\theta')(t) = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta(t) + K)},$$

y así tendríamos que integrar

$$\int \frac{\theta'(t)}{\sqrt{\cos\theta(t) + K}}\,dt = \pm\int\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt.$$

La primera de las integrales no parece fácil de calcular $\square$

Solución 2. El péndulo se inicia en $\theta(0) = \theta_0 \neq 0$, (si $\theta_0 = 0$, no hay movimiento, tenemos la solución estacionaria $\theta = 0$).

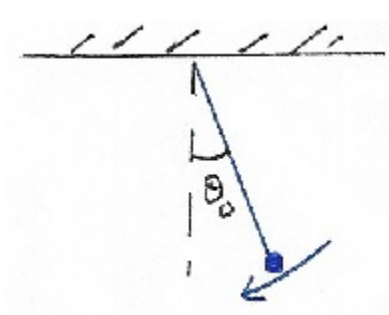

FIGURA 2. Posición inicial.

Así tenemos el problema inicial

$$\begin{cases} \theta''(t) & = & -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta(t) \\ \theta(0)=\theta_0 & \text{y} & \theta'(0)=0 \end{cases}$$

Como $\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$, para ángulos pequeños podemos aproximar

$$\operatorname{sen}\theta(t)\sim\theta(t)$$

y tendríamos la ecuación

$$\begin{cases} \theta''(t) & = & -\frac{g}{l}\theta(t) \\ \theta(0)=\theta_0 & \text{y} & \theta'(0)=0 \end{cases}$$

Esta es una **ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes** que más adelante veremos como se resuelve.

En un curso posterior de Ecuaciones Diferenciales se ven resultados de **Dependencia Continua** que nos aseguran que si $f\sim g$ entonces las soluciones x e y de los problemas

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y'(t) & = & g(t,y(t)) \\ y(0) & = & x_0 \end{cases}$$

también están próximas $x\sim y$ $\square$

Apéndice: obtención precisa de la ecuación del péndulo.

Vamos a reescribir la modelización en coordenadas polares:

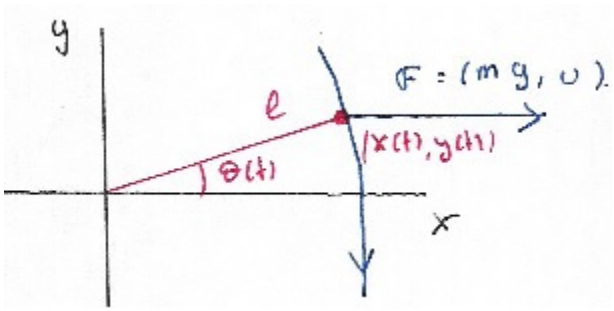

FIGURA 3. Posición inicial.

- $x(t)=l\cos\theta(t)$;
- $y(t)=l\operatorname{sen}\theta(t)$.

Derivando

- $x''(t)=-l\cos\theta(t)(\theta'(t))^2-l\operatorname{sen}\theta(t)\theta''(t)$
- $y''(t)=-l\operatorname{sen}\theta(t)(\theta'(t))^2+l\cos\theta(t)\theta''(t)$

Ahora aplicando la Segunda Ley de Newton

- $-l\cos\theta(t)(\theta'(t))^2-l\operatorname{sen}\theta(t)\theta''(t)=g$
- $-l\operatorname{sen}\theta(t)(\theta'(t))^2+l\cos\theta(t)\theta''(t)=0$

Despejando $(\theta')^2(t)$ de la primera ecuación

$$(\theta')^2(t) = \frac{l \operatorname{sen} \theta(t)\theta''(t) + g}{-l \cos \theta(t)}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación

$$-l \operatorname{sen} \theta(t) \frac{l \operatorname{sen} \theta(t)\theta''(t) + g}{-l \cos \theta(t)} = -l \cos \theta(t)\theta''(t).$$

Así

$$-lg \operatorname{sen} \theta(t) - l^2 \operatorname{sen}^2 \theta(t)\theta''(t) = l^2 \cos^2 \theta(t)\theta''(t),$$

y simplificando

$$\theta''(t) = \frac{-g}{l} \operatorname{sen} \theta(t) \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`