ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E.D.O. LINEALES DE ORDEN DOS Y MAYOR. INTRODUCCIÓN.

La ecuación lineal de 1º orden

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t),$$

donde a y b son funciones continuas, siempre admite una **solución explícita**, como hemos visto.

Si planteamos un problema lineal de segundo orden:

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t),$$

donde a, b y c son funciones continuas, este problema es mucho más complicado. Los Teoremas de Existencia y Unicidad, que vamos a enunciar, nos dicen que este problema tiene solución; incluso única fijando condiciones iniciales. Aunque conseguir **soluciones explícitas** solo lo podemos conseguir en casos particulares:

- cuando a y b son coeficientes constantes y c una función continua (que veremos con detalle);
- cuando se conoce alguna solución particular (veremos algún ejemplo);
- cuando a, b y c son funciones analíticas (que veremos más adelante si tenemos tiempo).

Si plantemos una E.D.O. lineal de orden mayor que dos, como vamos a ver, lo anterior se puede repetir con cierto grado de complicación.

Definición 1. *Sean $a, b : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ dos funciones de variable real y $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ otra función conocida. Se llama **E.D.O. lineal de** 2^o **orden** a la E.D.O.*

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t) \qquad (1)$$

A la E.D.O.

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \qquad (2)$$

*se le llama **E.D.O. lineal de** 2^o **orden homogénea** asociada*

Cuando las funciones a, b y f son continuas podemos asegurar que estas ecuaciones tienen solución gracias a los Teoremas de Existencia. Además cuando a y b son constantes y f es continua tenemos un método para calcular soluciones explícitas. Este caso de 2º orden no es más que un caso particular (**aunque muy útil en las aplicaciones**) de las E.D.O. lineales de orden superior.

Definición 2. *Sean $p_i : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ funciones de variable real para $i = 0, 1, ..., n-1$ y $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ otra función conocida. Se llama **E.D.O. lineal de n-ésimo orden** a la E.D.O.*

$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + ... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f(t) \qquad (1)$$

A la E.D.O.

$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + ... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0 \qquad (2)$$

*se le llama **E.D.O. lineal de n-ésimo orden homogénea** asociada*

Cuando las funciones p_i y f son continuas podemos asegurar que estas ecuaciones tienen solución gracias a los Teoremas de Existencia. Además cuando p_i son constantes y f es continua tenemos un método para calcular soluciones explícitas.

Ejemplos 1.

- $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \operatorname{sen} t$ *es una E.D.O lineal de 2º orden no homogénea (veremos como se resuelve este problema).*
- $x''(t) = \dfrac{x'^2(t)\operatorname{sen}(\, x(t)\,)}{x^2(t)+1}$ *es una E.D.O. de 2º orden **no** lineal. En general no tenemos un procedimiento para resolver esta ecuación. En este caso, es fácil ver que $x(t) = K$ constante es solución.*
- $x^{4)}(t) - 2x''(t) - x(t) = 3e^t$ *es una E.D.O. lineal de cuarto orden no homogénea.*

Teorema 1. *(de **Existencia y Unicidad**) Sean $p_i : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ funciones de variable real **continuas** para $i = 0, 1, ..., n-1$ y $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ otra función **continua** conocida. El **problema de Cauchy** o de valores iniciales*

$$\left\{ \begin{array}{c} y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + ... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, ..., y^{n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{array} \right. ,$$

*donde $t_0 \in [t_1, t_2]$ y $y_0, y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$, tiene una **única solución** cuyo dominio es todo el intervalo $[t_1, t_2]$.*

En el caso $n = 2$, el Teorema anterior nos dice que el problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1 \end{array} \right. ,$$

para a, b y f funciones continuas, tiene una solución única cuyo dominio es todo el intervalo $[t_1, t_2]$.

Observación 1. *El Teorema de arriba es un caso particular del Teorema de Existencia y Unicidad para sistemas lineales de E.D.O. de primer orden*

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t),$$

con $y, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *y* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *siendo* A *y* b *continuas. Veremos esta relación. La prueba de estos Teoremas queda para cursos superiores, aunque estamos en condiciones de darlas (solo la falta de tiempo lo impide).*

En el caso de que cada p_i *sea constante para todo* $i = 0, 1, ..., n-1$, *daremos una prueba de la existencia explícita de las soluciones. La unicidad de soluciones la vamos a necesitar, pero la prueba deberá esperar a cursos superiores.*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`