ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E.D.O. LINEALES DE ORDEN SUPERIOR. SOLUCIONES EXPLÍCITAS.

Dada una ecuación lineal

$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + ... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f(t),$$

no tenemos un método general para calcular sus soluciones de forma explícita (aunque sabemos que existen por los Teorema de Existencia y Unicidad y el Teorema de Estructura de las soluciones). En algunos casos particulares algo se puede decir.

Proposición 1. *Sean $p_0, p_1, f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Dada la E.D.O. lineal de segundo orden:*

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = f(x),$$

si y_1 es una solución del problema homogéneo asociado

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0,$$

entonces el cambio de variable

$$y(x) = y_1(x)z(x)$$

reduce el orden de la E.D.O. en una unidad.

Demostración: Derivando

$$\left.\begin{array}{rcc} y(x) & = & y_1(x)z(x) \\ y'(x) & = & y_1'(x)z(x) + y_1(x)z'(x) \\ y''(x) & = & y_1''(x)z(x) + 2y_1'(x)z'(x) + y_1(x)z''(x) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

entrando en al E.D.O

$$f(x) = y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) =$$

$$y_1''(x)z(x)+2y_1'(x)z'(x)+y_1(x)z''(x)+p_1(x)[y_1'(x)z(x)+y_1(x)z'(x)]+p_0(x)y_1(x)z(x) =$$

$$z(x)[y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1] + z'(x)[2y_1'(x) + p_1(x)y_1(x)] + y_1(x)z''(x).$$

Como y_1 es solución de la homogénea se tiene que

$$f(x) = z'(x)[2y_1'(x) + p_1(x)y_1(x)] + y_1(x)z''(x).$$

Y así, despejando

$$\boxed{z''(t)} = z'(x)\frac{-2y_1'(x) - p_1(x)y_1(x)}{y_1(x)} + \frac{f(x)}{y_1(x)} =$$

$$\boxed{z'(x)[\frac{-2y_1'(x)}{y_1(x)} - p_1(x)] + \frac{f(x)}{y_1(x)}}$$

que es una ecuación lineal de primer orden (si ponemos $t = z'$) que sabemos resolver $\square$

Ejemplo 1. *Queramos resolver:* $xy'' + 2y' + xy = 1$, *conociendo que* $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *es una solución de la E.D.O. homogénea asociada.*

Demostración: Primero comprobamos que y_1 es una solución.

$$y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

$$y_1'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}.$$

$$y_1''(x) = \frac{x^2[\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x] - 2x[x\cos x - \operatorname{sen} x]}{x^4} =$$

$$-\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}.$$

Ahora entrando en la E.D.O.

$$x[-\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}] + 2[\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}] + x\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $y(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} z(x)$. Derivamos

$$\left.\begin{array}{rcl} y(x) & = & \frac{\operatorname{sen} x}{x} z(x) \\ y'(x) & = & [\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}]z(x) + \frac{\operatorname{sen} x}{x} z'(x) \\ y''(x) & = & [-\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}]z(x) + 2[\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}]z'(x) + \frac{\operatorname{sen} x}{x} z''(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

entrando en la E.D.O

$$1 = \left[x[-\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}] + 2[\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}] + x\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] z(x) +$$

$$x\frac{\operatorname{sen} x}{x} z''(x) + 2x[\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}]z'(x) + 2\frac{\operatorname{sen} x}{x} z'(x) =$$

$$\operatorname{sen} x z''(x) + [2\cos x]z'(x).$$

Despejando

$$z''(x) = -2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} z'(x) + \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Hacemos $u = z'$ y resolvemos la ecuación lineal de primer orden

$$u'(x) = -2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} u(x) + \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

- La homogénea $u'(x) = -2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} u(x)$

  $$\frac{u'(x)}{u(x)} = -2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \text{integrando} \qquad u(x) = \frac{K_1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

  donde $K_1 \in \mathbb{R}$.

- Usando el método de variación de las constante, tomamos
$$u(x) = \frac{K(x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$
como solución particular. Entrando en la E.D.O.
$$u'(x) = \frac{K'(x)\operatorname{sen}^2 x - 2K(x)\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x} = -2K(x)\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$
de lo que se sigue que $K'(x) = \operatorname{sen} x$ y por tanto $K(x) = -\cos x$.
- La solución general de esta E.D.O. de primer orden es
$$u(x) = \frac{K_1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Como $z'(x) = \frac{K_1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$, integrando
$$z(x) = \int \frac{K_1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx + K_2 =$$
$$K_2 + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + K_1\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx = K_2 + \frac{1}{\operatorname{sen} x} - K_1\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$
Luego la solución general de nuestro problema inicial es:
$$\boxed{y(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}z(x) = \frac{1}{x} + K_2\frac{\operatorname{sen} x}{x} + K_1\frac{\cos x}{x}},$$
donde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

Obeservemos la estructura lineal de la solución general del problema □

De forma general tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2. *Sean $p_i, f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, $i = 0, 1, ..., n-1$. Dada la E.D.O. lineal de orden n:*
$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + ... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f(t),$$
si y_1 es una solución del problema homogéneo asociado
$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + ... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0,$$
entonces el cambio de variable
$$y(t) = y_1(t)z(t)$$
reduce el orden de la E.D.O. en una unidad.

Demostración: **Ejercicio**. Se procede como en el caso $n = 2$, visto anteriormente □

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es