ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E.D.O. LINEALES NO HOMOGÉNEAS. SOLUCIONES PARTICULARES.

Si tenemos una E.D.O. lineal no homogénea de coeficientes constantes:

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t),$$

donde la función f es de la forma

$$f(t) = e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t + Q(t)\operatorname{sen}\beta t]$$

siendo P y Q polinomios y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se puede "probar" una solución particular y_0 parecida a f. En concreto:

Proposición 1. *Sea una E.D.O. lineal de orden n* ***no*** *homogénea y de* ***coeficientes constantes***

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t),$$

donde la función f es de la forma

$$f(t) = e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t + Q(t)\operatorname{sen}\beta t]$$

siendo P y Q polinomios y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = \alpha + \beta i$ ***es una raíz*** *de la ecuación característica de* ***multiplicidad*** *s (puede ser cero y entonces no es raíz), entonces*

$$y_0(t) = t^s e^{\alpha t}[\widetilde{P}(t)\cos\beta t + \widetilde{Q}(t)\operatorname{sen}\beta t]$$

donde $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ son ciertos polinomios de grado el mayor de los grados de los polinomios P y Q, esta y_0 es una ***solución particular*** *de la E.D.O.*

Demostración: La prueba que sigue consiste, efectivamente, en hallar los polinomios $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$. Lo veremos en sus distintos casos.

$f(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k t^k$, **$f$ es simplemente un polinomio**

(En este caso $\alpha = 0$ y $\beta = 0$).

- Si $\lambda = 0$ no es raíz de la Ecuación Característica, entonces el coeficiente de la E.D.O. $a_0 \neq 0$. Usando el Principio de Superposición de la lección anterior, será suficiente con ver que la E.D.O

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = t^k$$

tiene como solución particular y_0 un polinomio de grado k. Claro, si

$$y_0(t) = \sum_{j=0}^{k} c_j t^j \qquad \text{(donde } c_j \text{ están por determinar)},$$

$$y_0'(t) = \sum_{j=1}^{k} j c_j t^{j-1} \qquad \text{(polinomio de grado } k-1\text{)},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_0^{n)}(t) = \sum_{j=n}^{k} j(j-1)...(j-n+1)c_j t^{j-n} \qquad \text{(polinomio de grado } k-n$$

o cero si $n > k$. Si entramos en la E.D.O. con y_0 tenemos

$$y_0^{n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y_0^{i)} = ...\text{polinomio de grado k...} = t^k.$$

Igualando coeficientes tenemos un sistema lineal de $(k+1)$-ecuaciones y $(k+1)$-incógnitas $(c_0, c_1, ..., c_k)$. En particular,

$$a_0 c_k = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c_k = 1/a_0.$$

$$a_1 k c_k + a_0 c_{k-1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_{k-1} = -a_1 k (1/a_0^2)$$

$$.....\text{etc.}$$

- Si $\lambda = 0$ es raíz de la Ecuación Característica de multiplicidad s, entonces la E.D.O. es de la forma

$$y^{n)} + \sum_{i=s}^{n-1} a_i y^{i)} = f(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k t^k \qquad \text{con} \qquad a_s \neq 0.$$

El cambio de variable $z(t) = y^{s)}$, nos reduce la ecuación a

$$z^{n-s)} + \sum_{i=s}^{n-1} a_i z^{i-s)} = f(t) \qquad \text{con} \qquad a_s \neq 0.$$

Ya estamos en el caso anterior, así existe una solución particular $z_0 = P$. Este un polinomio es de grado N. Como

$$z_0 = y_0^{s)} \qquad \text{integrando } s \text{ veces} \qquad y_0 = t^s \widetilde{P}(t),$$

donde $\widetilde{P}$ es un polinomio de grado N $\qquad \square$

$$f(t) = P(t)e^{\lambda t}, \quad P \ \textbf{polinomio de grado } N.$$

En principio no distinguimos si λ es real o complejo. Para fijar ideas, podemos pensar que $\lambda = \alpha$ y $\beta = 0$. Antes de seguir un Lema.

Lema 1. *Sea una E.D.O. lineal de orden n y coeficientes constantes*

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t).$$

Si $\lambda_1, ..., \lambda_r$ son las raíces distintas de la Ecuación Característica con multiplicidades $s_1, ..., s_r$ respectivamente, así

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Pi_{i=1}^{r}(D - \lambda_i)^{s_i}y(t) = f(t),$$

entonces el cambio de variable

$$y(t) = e^{\lambda t}z(t)$$

transforma la ecuación en

$$\Pi_{i=1}^{r}(D - (\lambda_i - \lambda))^{s_i}z(t) = f(t)e^{-\lambda t}.$$

Demostración: En el caso homogéneo $f = 0$, como

$$y(t) = e^{\lambda t}z(t)$$

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}z(t) + e^{\lambda t}z'(t) = e^{\lambda t}(\lambda z(t) + z'(t))$$

$$y''(t) = \lambda e^{\lambda t}(\lambda z + z') + e^{\lambda t}(\lambda z' + z'') = e^{\lambda t}(\lambda^2 z + 2\lambda z' + z'')$$

$$.....\text{etc}$$

entrando en la E.D.O nos queda

$$(*) \qquad e^{\lambda t}[z^n + b_{n-1}z^{n-1)} + ... + b_0z] = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$z^n + b_{n-1}z^{n-1)} + ... + b_0z = 0.$$

Por el Teorema 2 de tres lecciones atrás (soluciones explícitas de $y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$), sabemos que las soluciones independientes son

$$y(t) = t^je^{\lambda_i t}.$$

Por el cambio de variable,

$$z(t) = t^je^{\lambda_i t}e^{-\lambda t}.$$

Luego la Ecuación Característica de la E.D.O. en z tiene que ser

$$\Pi_{i=1}^{r}(x - (\lambda_i - \lambda))^{s_i} = 0.$$

Ahora, el caso general, para f no nula, se sigue de $(*)$ $\square$

El cambio de variable del Lema nos permite "trasladar" las raíces de la Ecuación Característica sin perder la multiplicidad.

- λ no es raíz de la Ecuación Característica. Si hacemos el cambio $y(t) = e^{\lambda t} z(t)$, por el lema nos queda el problema

$$\Pi_{i=1}^{r}(D - (\lambda_i - \lambda))^{s_i} z = z^n + b_{n-1} z^{n-1)} + ... + b_0 z = P(t)$$

donde $b_0 \neq 0$, ya que $\lambda \neq \lambda_i$ para todo i. Estamos en el caso de arriba y por tanto existe una solución particular

$$z_0(t) = \widetilde{P}(t),$$

un polinomio de grado N. Deshaciendo el cambio de variable,

$$y_0(t) = e^{\lambda t} \widetilde{P}(t)$$

es una solución particular del problema de partida.

- λ es raíz de la Ecuación Característica. Supongamos que $\lambda = \lambda_1$ con multiplicidad s_1. Como antes, hacemos el cambio de variable $y(t) = e^{\lambda_1 t} z(t)$ y obtenemos

$$[\Pi_{i=2}^{r}(D - (\lambda_i - \lambda_1))^{s_i}] D^{s_1} z = z^n + b_{n-1} z^{n-1)} + ... + b_{s_1} z^{s_1)} = P(t),$$

con $b_{s_1} \neq 0$. Usando el caso de arriba, existe una solución particular,

$$z_0(t) = t^{s_1} \widetilde{P}(t)$$

donde $\widetilde{P}$ es un polinomio de grado N. Deshaciendo el cambio de variable,

$$y_0(t) = e^{\lambda_1 t} t^{s_1} \widetilde{P}(t)$$

es una solución particular del problema de partida $\square$

$$f(t) = e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t + Q(t)\operatorname{sen}\beta t],$$

donde P, Q **son polinomios reales y** $\beta \neq 0$

Vamos a usar el caso anterior teniendo en cuenta que allí $\lambda = \alpha + \beta i$ podía ser real o complejo (cuando $\beta \neq 0$). Observemos que:

$$e^{\alpha t} P(t)\cos\beta t = \frac{1}{2} P(t)[e^{(\alpha+\beta i)t} + e^{(\alpha-\beta i)t}]$$

y que

$$e^{\alpha t} Q(t)\operatorname{sen}\beta t = \frac{1}{i2} Q(t)[e^{(\alpha+\beta i)t} - e^{(\alpha-\beta i)t}].$$

Luego

$$e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t + Q(t)\operatorname{sen}\beta t] = e^{(\alpha+\beta i)t}[\frac{1}{2}P(t) + \frac{1}{i2}Q(t)] +$$

$$e^{(\alpha-\beta i)t}[\frac{1}{2}P(t) - \frac{1}{i2}Q(t)] = f(t) = e^{(\alpha+\beta i)t} R(t) + e^{(\alpha-\beta i)t} S(t),$$

donde R y S son polinomios de grado el máximo del grado de P y Q, con coeficientes complejos.

Usando el Principio de Superposición y el caso anterior (para $\lambda = \alpha \pm \beta i$ complejo y polinomios R y S de coeficientes complejos), tenemos que existe una solución particular y_0 del problema no homogéneo de la forma (para s la multiplicidad de $\alpha + \beta i$ o $\alpha - \beta i$ como raíz de la Ecuación Característica)

$$y_0(t) = t^s e^{(\alpha+\beta i)t}\widetilde{R}(t) + t^s e^{(\alpha-\beta i)t}\widetilde{S}(t) =$$

$$t^s e^{\alpha t}\cos\beta t\widetilde{P}(t) + t^s e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\widetilde{Q}(t) = y_1(t) + y_2(t)i.$$

Si $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ son polinomios con coeficiente reales hemos terminado. Si no, tomamos la parte real de y_0. Claro, si entramos en la E.D.O. con $y_0 = y_1 + y_2 i$, tenemos que

$$y_1^{n)}(t) + a_{n-1}y_1^{n-1)}(t) + ... + a_1 y_1'(t) + a_0 y_1(t) +$$

$$i[y_2^{n)}(t) + a_{n-1}y_2^{n-1)}(t) + ... + a_1 y_2'(t) + a_0 y_2(t)] = f(t).$$

Como f es real, se sigue que

$$y_2^{n)}(t) + a_{n-1}y_2^{n-1)}(t) + ... + a_1 y_2'(t) + a_0 y_2(t) = 0.$$

Luego $y_1 = Re(t^s e^{\alpha t}\cos\beta t\widetilde{P}(t) + t^s e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\widetilde{Q}(t))$, es como nos pide el enunciado, como si $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ son polinomios con coeficientes reales $\square$

Ejemplo 1. *Queremos encontrar soluciones particulares en los siguientes ejemplos:*

1. $y'' - y' - 5y = 1$;
2. $y'' + y = x^3 - x + 1$ *(compara con el mismo ejemplo en la lección anterior);*
3. $y'' + 4y = 3\operatorname{sen} x$;
4. $y'' - y' + 4y = 3\operatorname{sen} x$.

Demostración:

1. $y'' - y' - 5y = 1$. Probamos una solución particular $y_0 = A$ constante ($\lambda = 0$ no es raíz de la Característica y 1 es un polinomio de grado cero). Entrando en la E.D.O. con $y_0 = A$, tenemos que:

$$-5A = 1, \qquad \text{luego} \qquad A = -1/5.$$

2. $y'' + y = x^3 - x + 1$. Como $\lambda = 0$ no es raíz de la Característica, probamos con un polinomio de grado 3

$$y_0(x) = B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0$$

$$y_0'(x) = 3B_3x^2 + 2B_2x + B_1$$

$$y_0''(x) = 6B_3x + 2B_2.$$

Entrando en la E.D.O., tenemos que

$$6B_3x + 2B_2 + B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0 = x^3 - x + 1.$$

Igualando coeficientes

$$\begin{array}{rcl} B_3 & = & 1 \\ B_2 & = & 0 \\ 6B_3 + B_1 & = & -1 \\ 2B_2 + B_0 & = & 1 \end{array},$$

sistema 4×4 que tiene por solucíon: $B_3 = 1, B_2 = 0, B_1 = -7$ y $B_0 = 1$. Así nuestra solución particular es:

$$y_0 = x^3 - 7x + 1.$$

3. $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} x$. Como $\lambda = \pm i$ no es solución de la característica probamos con una solución del tipo

$$y_0(x) = A \operatorname{sen} x$$

$$y_0'(x) = A \cos x$$

$$y_0''(x) = -A \operatorname{sen} x.$$

Entrando en la E.D.O.

$$-A \operatorname{sen} x + 4A \operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} x.$$

Claramente $A = 1$ y $y_0(x) = \operatorname{sen} x$ es una solución particular. ¿No tendríamos que haber elegido $y_0 = A \operatorname{sen} x + B \cos x$? La respuesta es SI, claro que en este caso particular $B = 0$. Veamos que no ocurre lo mismo en el ejemplo siguiente.

4. $y'' - y' + 4y = 3 \operatorname{sen} x$. Como $\lambda = \pm i$ no es ráiz de la Característica, probamos una solución del tipo

$$y_0(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

$$y_0'(x) = -A \operatorname{sen} x + B \cos x$$

$$y_0''(x) = -A \cos x - B \operatorname{sen} x.$$

Entrando en la E.D.O., tenemos que:

$$-A \cos x - B \operatorname{sen} x + A \operatorname{sen} x - B \cos x + 4A \cos x + 4B \operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} x.$$

Igualando coeficientes

$$\begin{array}{rcl} 3A - B & = & 0 \\ A + 3B & = & 3. \end{array}$$

Resolvemos el sistema y $A = 3/10$ y $B = 9/10$, luego la solución particular que buscamos es:

$$y_0(x) = \frac{3}{10} \cos x + \frac{9}{10} \operatorname{sen} x \qquad \square$$

Ejercicio 1. *Encuentra una solución particular de* $y'' + y = 3 \operatorname{sen} x$. *Como* $\lambda = \pm i$ *son dos raíces complejas conjugadas de multiplicidad* 1 *de la Característica, prueba con una solución particular del tipo:*

$$y_0(x) = xA \cos x + xB \operatorname{sen} x.$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es