ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E.D.O. DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE E.D.O. DE ORDEN UNO. ECUACIÓN CARACTERÍSTICA.

Existe una relación entre la E.D.O. de orden superior (resueltas respecto de la derivada de mayor orden) y los sistemas de E.D.O. de primer orden. En concreto, dada la E.D.O. de orden n

$$x^{n)}(t) = f(\, t, x(t), x'(t), ..., x^{n-1)}(t)\,) \qquad (*),$$

el cambio de variables

$$\begin{array}{ccccc} x(t) & = & x_1(t) & & \\ x'(t) & = & x_2(t) & = & x_1'(t) \\ x''(t) & = & x_3(t) & = & x_2'(t) \\ \vdots & & & & \vdots \\ x^{n-2)}(t) & = & x_{n-1}(t) & = & x_{n-2}'(t) \\ x^{n-1)}(t) & = & x_n(t) & = & x_{n-1}'(t) \end{array},$$

y, por otra parte, con la notación anterior sabemos que

$$x_n'(t) = x^{n)}(t) = f(\, t, x_1(t), x_2(t), ..., x_{n-1}(t)\,).$$

Con esto tenemos el sistema de E.D.O. de primer orden y n incógnitas

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_3(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1}'(t) & = & x_n(t) \\ x_n'(t) & = & f(\, t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\,) \end{array}\right\} \qquad (**)$$

Observación 1.

- *Si x es una solución de la E.D.O. $(*)$, entonces*

$$(x, x', ..., x^{n-1)})$$

es una solución del sistema $(**)$.

- *Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una solución del sistema $(**)$, entonces*

$$x_1(t)$$

es una solución de la E.D.O. $(*)$.

Lo anterior nos dice que hay ciertas relaciones entre ambos problemas. Y así, por ejemplo, si tenemos un Teorema de Existencia y Unicidad para sistemas de E.D.O. de primer orden, también lo tenemos para

E.D.O. de orden superior. De hecho, el Teorema de Existencia y Unicidad usual que se prueba es para sistemas de primer orden y con ello ya se tiene un Teorema de Existencia para E.D.O. de orden superior.

Ejemplo 1. *La E.D.O.* $x'''(t) = tx(t) + t^2x''(t)$ *es equivalente al sistema*

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_3(t) \\ x_3'(t) & = & tx_1(t) + t^2x_3(t). \end{array}$$

El caso lineal.

Si tenemos una E.D.O. lineal

$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + ... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f(t),$$

el cambio de variables $y = y_1, y' = y_2, ..., y^{n-1)} = y_n$ nos lleva al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_3(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n-1}'(t) & = & y_n(t) \\ y_n'(t) & = & -p_0(t)y_1(t) - p_1(t)y_2(t) \cdots - p_{n-1}(t)y_n(t) + f(t) \end{array}\right\},$$

que podemos escribir de forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & \cdots & & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Notación: Si

$$y(t) \in (\, C[\alpha, \beta]\,)^n$$

$$A(t) \in M_{n\times n}(\, C[\alpha, \beta]\,)$$

y

$$b(t) \in (\, C[\alpha, \beta]\,)^n,$$

entonces el sistema anterior se puede escribir de la forma reducida

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

(sistemas que vamos a estudiar en el Tema siguiente).

Podemos escribir algo similar cuando nuestra E.D.O. de orden n es de coeficientes constantes

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t).$$

El cambio de variables $y = y_1, y' = y_2, ..., y^{n-1)} = y_n$ nos lleva al sistema

$$\left.\begin{array}{rcllll} y_1'(t) & = & & y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & & y_3(t) & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ y_{n-1}'(t) & = & & & & y_n(t) \\ y_n'(t) & = & -a_0 y_1(t) & -a_1 y_2(t) & \cdots & -a_{n-1} y_n(t) \quad +f(t) \end{array}\right\},$$

que podemos escribir de forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

y de forma reducida

$$y'(t) = Ay(t) + b(t),$$

donde ahora $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, es una matriz constante. Estos sistemas lineales con matrices A constantes vamos a ver que los podemos resolver explícitamente, como sabemos hacer con las E.D.O. lineales de coeficientes constantes. El siguiente resultado nos da la relación íntima entre ambos problemas.

Proposición 1. *Sea la E.D.O. lineal de orden n homogénea de coeficientes constantes*

$$y^{n)}(t) + a_{n-1}y^{n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Se considera la matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ del sistema lineal asociado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Se verifica que el polinomio característico de la E.D.O. es igual, salvo signo, al de la matriz. Es decir

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = \pm|A - \lambda I|$$

Demostración: **Ejercicio.** Usar inducción sobre el orden n de la E.D.O. $\square$

Observación 2. *Las ecuaciones características, la de la E.D.O. y la de la matriz coinciden. Así las* ***raíces*** *de la* ***Ecuación Característica*** *de la E.D.O. y los* ***autovalores*** *de la matriz A* ***coinciden****.*

En el tema siguiente veremos que las soluciones de los sistemas $y' = Ay$ están relacionadas con los autovalores de la matriz A.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es