ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS DE COEFICIENTES CONSTANTES. EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ.

Consideramos el problema:

$$x'(t) = Ax(t),$$

donde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es uns matriz constante; por tanto A es continua para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Vamos a ver que en este caso, más sencillo que un sistema en general, podemos **encontrar una matriz fundamental explícitamente**.

Sea $\phi(t)$ una matriz fundamental que, ahora, está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ (ver Teorema de Existancia y Unicidad para sistemas lineales). Podemos suponer que $\phi(0) = I$, la matriz identidad (si no es el caso, se toma $\psi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)$). La matriz fundamental $\phi(t)$ con la propiedad $\phi(0) = I$ es **única** (por el Teorema de Unicidad).

En esta situación tenemos que:

Proposición 1. *Sea el sistema $x'(t) = Ax(t)$, con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sea la matriz fundamental $\phi(t)$ con la propiedad $\phi(0) = I$. Entonces:*

a): *el problema de Cauchy*

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & Ax(t) \\ x(0) & = & x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array},$$

tiene por solución: $x(t) = \phi(t)x_0$.

b): $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$.

c): $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: **a)** y **c) Ejercicios** (para probar **c)** se usa **b)**).

b) Se **fija** $s \in \mathbb{R}$ y se consideran las matrices:

$$\phi_1(t) = \phi(t+s) \qquad \text{y} \qquad \phi_2(t) = \phi(t)\phi(s).$$

Por las propiedades de las matrices fundamentales, ambas son matrices fundamentales del sistema. O, en todo caso, se puede comprobar que

$$\phi_1'(t) = \phi'(t+s) = A\phi(t+s) = A\phi_1(t)$$

y

$$\phi_2'(t) = \phi'(t)\phi(s) = A\phi(t)\phi(s) = A\phi_2(t).$$

Además

$$\phi_1(0) = \phi(s) \qquad \text{y} \qquad \phi_2(0) = I\phi(s) = \phi(s),$$

así, por el Teorema de Unicidad, $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ $\square$

Observación 1. *Las propiedades **b)** y **c)** de la Proposición anterior recuerdan a las propiedades de la función exponencial. ¿Es esto una coincidencia?*

Recordemos que la E.D.O. lineal homogénea con coeficiente constante:

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & ax(t) \\ x(0) & = & 1 \end{array}$$

tiene por solución $\quad x(t) = e^{at}, \quad$ una solución exponencial. Ahora, dejando volar la imagianción o simplemente por analogía, podemos pesar que la solución del sistema $x'(t) = Ax(t)$ es:

$$e^{At} \qquad \text{¡la exponencial de una matriz!}$$

El problema es que, de momento, este concepto no existe. ¿Que hacemos para definirlo? Por un lado sabemos que el desarrollo de Taylor de la exponencial es:

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}.$$

Por analogía:

Definición 1. *Sea una matriz cuadrada $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define su matriz exponencial e^B por:*

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!},$$

donde $B^0 = I$.

¿Que sentido tiene lo que acabamos de definir? Por un lado, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Lo que dice la definición es que la sucesión de matrices $(X_N)_N$ converge a una matriz e^B. Pero, ¿que significa esta convergencia? Según veíamos en los prelimirares del Teorema de Existencia y Unicidad de sistemas de E.D.O lineales (ver lecciones anteriores),

Definición 2. *Se define la* ***norma infinito*** *de:*

- ***de un vector*** $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}$ *por:*
$$||x||_\infty = max\{|x_i| \ : \ i = 1, 2, ..., n\};$$
- ***de una matriz*** $B = (b_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *por*
$$||B||_\infty = max\{|b_{i,j}| \ : \ i, j = 1, 2, ..., n\};$$
- ***de una función continua*** $f \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *continua, por*
$$||f||_\infty = max\{||f(t)||_\infty \ : \ t =\in [a, b]\}.$$

Para el problema que nos acupa: $x'(t) = Ax(t)$, fijado cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tenemos la sucesión de funciones

$$\begin{array}{rcccl} X_N & : & [a,b] & \to & \mathbb{R}^{n^2} \\ & & t & \to & X_N(t) \ = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k t^k}{k!} \end{array}$$

que nos gustaría que convergiese a

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

donde se entiende la convergencia como que

$$||e^{At} - X_N(t)||_\infty = ||e^{At} - \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k t^k}{k!}||_\infty \to_{N\to\infty} 0.$$

Se dice entonces que la **sucesión de funciones** $(X_N)_N$ **converge uniformemente** a la funcón e^{At} (Ver Apéndice sobre Espacios Normados).

Además, si todo es análogo a lo que pasa para $n = 1$, tendría que ocurrir que e^{At} es una matriz fundamental del problema $x'(t) = Ax(t)$. Vamos a verlo. En primer lugar:

Lema 1. *Para toda matriz cuadrada* $A = (a_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *y para todo* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene que*
$$||A^k||_\infty \leq n^k ||A||_\infty^k.$$

Demostración: : Por inducción. Para $k = 2$, la definición de multiplicación de matrices nos dice que

$$A \times A = (\sum_{m=1}^{n} a_{i,m} a_{m,j})_{i,j=1,...,n}$$

y así

$$||A^2||_\infty = ||(\sum_{m=1}^{n} a_{i,m} a_{m,j})||_\infty =$$

$$max\{|\sum_{m=1}^{n} a_{i,m} a_{m,j}| \ : \ i, j = 1, 2, ..., n\} \leq$$

$$max\{\sum_{m=1}^{n}|a_{i,m}||a_{m,j}| \ : \ i,j=1,2,...,n\} \leq$$
$$max\{\sum_{m=1}^{n}||A||_\infty||A||_\infty \ : \ i,j=1,2,...,n\} =$$
$$n||A||_\infty||A||_\infty \leq n^2||A||_\infty^2.$$

Supuesto que conocemos el caso k, se sigue que

$$||A^{k+1}||_\infty = ||A \times A^k||_\infty \leq$$

de forma análoga a lo de arriba

$$n||A||_\infty||A^k||_\infty \leq$$

y por hipótesis de inducción

$$n||A||_\infty n^k||A||_\infty^k = n^{k+1}||A||_\infty^{k+1} \qquad \square$$

Teorema 1. *Sea el sistema $x'(t) = Ax(t)$ con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sea $\phi(t)$ la matriz fundamental que verifica que $\phi(0) = I$. Sea la sucesión de funciones $(X_N(t))_N$:*

$$\begin{array}{rcccl} X_N & : & [a,b] & \to & \mathbb{R}^{n^2} \\ & & t & \to & X_N(t) \ = \sum_{k=0}^{N}\frac{A^k t^k}{k!} \end{array} .$$

Entonces se tiene que la sucesión $(X_N(t))_N$ converge uniformemente a $\phi(t)$ en todo intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Por el Teorema anterior escribimos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} = \phi(t)$$

y notamos $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$ por

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} = e^{At}.$$

Demostración: (**del Teorema**) Tenemos que ver que que las matrices $X_N(t) = (\, X_{N,i,j}(t)\,)$ y la matriz $\phi(t) = (\phi_{i,j}(t))$ verifican que:

$$||X_N(t) - \phi(t)||_\infty = \to_{N\to\infty} 0,$$

equivalente a decir que

$$\text{para todo } \ \epsilon > 0 \ \text{ existe } \ N_0 \ \text{ de modo que si } \ N \geq N_0,$$

entonces $\quad |X_{N,i,j}(t) - \phi_{i,j}(t)| \leq \epsilon$ para todo $i,j = 1,...,n$ y $t \in [a,b]$.

Sabemos por el Teorema de existencia que ϕ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora fijamos un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Definimos $M > 0$ de modo que

$$|t| \leq M \qquad \text{para todo} \qquad t \in [a,b].$$

Entonces

$$||X_r(t)-X_m(t)||_\infty = max_{t\in[a,b]}\{\ |X_{r,i,j}(t)-X_{m,i,j}(t)|\ :\ i,j=1,2,..n\ \} =$$

si $r > m$

$$||\sum_{k=m+1}^{r} \frac{A^k t^k}{k!}||_\infty \leq$$

usando la propiedad triangular de las normas

$$\sum_{k=m+1}^{r} \frac{||A^k||_\infty |t|^k}{k!} \leq$$

usando el lema anterior

$$\sum_{k=m+1}^{r} \frac{n^k ||A||_\infty^k M^k}{k!} \to_{r,m\to\infty} 0,$$

donde la convergencia a cero se tiene por ser la cola de una serie numérica convergente.

En particular se ve que, fijado $t \in [a,b]$ y fijados i,j, entonces la sucesión numérica $(X_{N,i,j}(t))_N$ es de Cauchy y por tanto convergente. Luego para todo $t \in [a,b]$ y para todo $i,j = 1,...n$ existe

$$\lim_{N\to\infty} X_{N,i,j}(t) = b_{i,j}(t).$$

Así la sucesión de funciones $(X_N(t))_N$ **converge puntualmente** a una función, que llamamos $e^{At} = (b_{i,j}(t))$ para todo $t \in [a,b]$. Además esta convergencia es uniforme, ya que usando lo de arriba:

$$\text{dado } \epsilon > 0 \text{ existe } N_0 \text{ de modo que si } N, m \geq N_0,$$

entonces $\quad |X_{N,i,j}(t)-X_{m,i,j}(t)| \leq \epsilon$ para todo $i,j = 1,...,n$ y $t \in [a,b]$.

Ahora tomando límites en N, llegamos a que

$$|b_{i,j}(t) - X_{m,i,j}(t)| \leq \epsilon \text{ para todo } i,j = 1,...,n \text{ y } t \in [a,b],$$

lo que prueba la convergencia uniforme.

Por último vamos a probar que $e^{At} = \phi(t)$. Para ello usaremos la expresión integral de un sistema de E.D.O. lineales (vista en una lección anterior).

Definimos

$$Y_0(t) = I$$

y por recurrencia

$$Y_{N+1} = I + \int_0^t AY_N(s)ds$$

donde la integral se hace componente a componente.

Es claro que

$$Y_0(t) = X_0(t) = I.$$

Además

$$Y_1(t) = I + \int_0^t A ds = I + At = X_1(t).$$

Por inducción probamos que para todo N.

$$Y_N(t) = X_N(t).$$

Claro, supongamos que $Y_N(t) = X_N(t)$, entonces

$$Y_{N+1}(t) = I + \int_0^t AY_N(s)ds = I + \int_0^t AX_N(s)ds =$$

$$= I + \int_0^t A \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k s^k}{k!} ds = I + \int_0^t \sum_{k=0}^{N} \frac{A^{k+1} s^k}{k!} ds =$$

$$I + \sum_{k=0}^{N} \frac{A^{k+1}}{k!} \int_0^t s^k ds = I + \sum_{k=0}^{N} \frac{A^{k+1}}{k!} \frac{t^{k+1}}{k+1} =$$

$$I + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{A^k t^k}{k!} = X_{N+1}(t).$$

Recordemos que si una sucesión de funciones $(f_N(t))_N$ convergen uniformemente a una función f en $[a, b]$, y cada una es integrable, entonces se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b f_N(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Ya sabemos que

$$X_N(t) = I + \int_0^t AX_{N-1}(s)ds,$$

tomamdo límite en ambos lados de la igualdad cuando $N \to \infty$ y teniendo en cuanta la convergencia uniforme, llegamos a que

$$\begin{array}{ccccc} X_N(t) & = & I & + & \int_0^t AX_{N-1}(s)\, ds \\ \downarrow & {\scriptstyle N\uparrow\infty} & \downarrow & {\scriptstyle N\uparrow\infty} & . \\ e^{At} & = & I & + & \int_0^t Ae^{As}\, ds \end{array}$$

Con esta igualdad, podemos derivar e^{At}. Para ello derivamos la parte derecha de la igualdad de arriba (componente a componente) usando el Teorema Fundamental del Cálculo.Así

$$(e^{At})' = Ae^{At} \qquad (D).$$

Esto prueba que e^{At} es una matriz de soluciones del sistema. Además

$$e^{A0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k 0^k}{k!} = I,$$

por el Teorema de Unicidad se llega a que $e^{At} = \phi(t)$ $\square$

El Teorema anterior entre otras cosas es una fórmula de derivación (D). Como la exponencial de una matriz es una matriz fundamental, tiene sus mismas propiedades. Así por los resultados anteriores, este nuevo objeto que hemos definido e^{At} tiene las mismas propiedades que la función exponencial e^{at} que ya conocíamos.

Corolario 1. *Sea una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces se verifica que*

- $e^{At} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$.
- $(e^{At})' = Ae^{At}$.
- $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es