# Elem. de E.D.O. PRÁCTICA-14

**Nombre y apellidos**.....

$1_1$.- Dadas dos matrices $A$ y $B$ de orden $n \times n$ que conmutan (es decir $AB = BA$ ), prueba que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ (**Indicación:** usar un Teorema de unicidad).

CONSIDERAMOS LA MATRIZ $\phi_1(t) = e^{(A+B)t}$, MATRIZ FUNDAMENTAL DEL PROBLEMA $\phi'(t) = (A+B)\phi(t)$ CON $\phi(0) = I$.

SEA AHORA $\phi_2(t) = e^{At}e^{Bt}$; DERIVANDO

$\phi_2'(t) = (e^{At})'e^{Bt} + e^{At}(e^{Bt})' = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{At} =$

$AB = BA$

$= Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt}$

LUEGO $\phi_2$ ES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA $\phi' = (A+B)\phi$ $\sum \frac{A^k t^k}{k!} \cdot B = \sum \frac{A^k B t^k}{k!} = Be^{At}$

ADEMAS $\phi_2(0) = I + I = I$; LA UNICIDAD DE SOLUCIONES NOS DICE QUE $\phi_1 = \phi_2$, ES DECIR

$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

$1_2$.- Encuentra dos matrices $A$ y $B$ de orden $n \times n$ de modo que $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (**Indicación:** resuelve primero el ejercicio **2**).

a) SEAN $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. NO CONMUTAN $\left\{ \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

b) $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{n!} = \begin{pmatrix} \sum \frac{1}{n!} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = A$

c) COMO $B^n = B$ $e^B = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

d) $e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e(e-1) \\ 0 & e \end{pmatrix}$

e) $e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

MATRICES DISTINTAS

2.- Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = D + E = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

$2_1$.- Calcula $e^{At}$

$$e^{At} \underset{DIF}{=} I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} t^n/n! & 0 & 0 \\ 0 & 7^n t^n/n! & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-3)^n t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum t^n/n! & 0 & 0 \\ 0 & \sum \frac{7^n t^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-3)^n t^n}{n!} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{7t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$2_2$.- Calcula $e^{Bt}$ $\quad e^{B} = e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n t^n}{n!} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n t^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n t^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^n t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1 t^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2 t^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_3^n t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

$2_2$.- Calcula $e^{Ct}$ (**Indicación:**¿$D$ y $E$ conmutan?) $\quad DE = aIE = EIa = ED$

conmutan luego por el ejercicio 1.1

$$e^{Ct} = e^{(D+E)t} = e^{Dt} e^{Et}$$

$$e^{Dt} = e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} t} \underset{2_2}{=} \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

— · —

consideramos ahora $E = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; sea

$$\begin{cases} Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ Q_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -I \\ Q_0^3 = -Q_0 \\ Q_0^4 = I \\ Q_0^5 = Q_0 \text{ - etc.} \end{cases}$$

$$e^{Et} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n b^n t^n}{n!} =$$

tomando $n$ par y $n$ impar

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} b^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} b^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k I\, b^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k Q_0\, b^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^k b^{2k} t^{2k}}{(2k)!} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^k b^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-1)^k b^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\frac{(-1)^k b^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (bt)^{2k}}{(2k)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (bt)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (bt)^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (bt)^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} \underset{\text{serie de Taylor de sen y cos}}{=} \begin{pmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

y así tanto $e^{Ct} = e^{Dt} e^{Et} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\operatorname{sen} bt \\ -e^{at}\operatorname{sen} bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}$.