

ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

AUTOVALORES REALES IGUALES.

Vamos a dibujar los diagramas de fases de los sistemas de E.D.O. lineales planos en el caso de que la matriz de coeficientes solo tenga un autovalor real de multiplicidad dos. Es decir, sistemas que reducidos a su forma de Jordan son de la forma:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \lambda x \\ y' & = & \lambda y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

o bien

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \lambda x + y \\ y' & = & \lambda y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para ello tendremos en cuenta las propiedades generales que verifican las trayectorias de un sistema autónomo (que vimos tres lecciones atrás):

- las trayectorias no se cortan;
- las trayectorias son curvas simples o periódicas (esto último solo es posible si hay autovalores complejos);
- o también pueden ser puntos de equilibrio.

Como en la lección anterior, veremos los casos reducidos a matrices de Jordan y veremos como esta información nos permite luego ver los casos generales.

Matrices con un autovalor doble, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Este caso a su vez se divide en dos.

$\lambda < 0$

Todas las soluciones de este tipo de sistemas son de la forma:

$$(x(t), y(t)) = c_1 e^{\lambda t} (1, 0) + c_2 e^{\lambda t} (0, 1) = e^{\lambda t} (c_1, c_2) \quad \text{para} \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2,$$

de modo que el dominio de las soluciones es todo $\mathbb{R}$ y $(x(0), y(0)) = (c_1, c_2)$. Observamos que las trayectorias son semirectas vectoriales que unen el origen con el punto (c_1, c_2) en cada caso.

Puntos de equilibrio. Es claro que el $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio.

Límites. $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t}(c_1, c_2) = (0, 0)$. las trayectorias **entran** a cero. Y dado que son rectas el diagrama de fase que tenemos es:

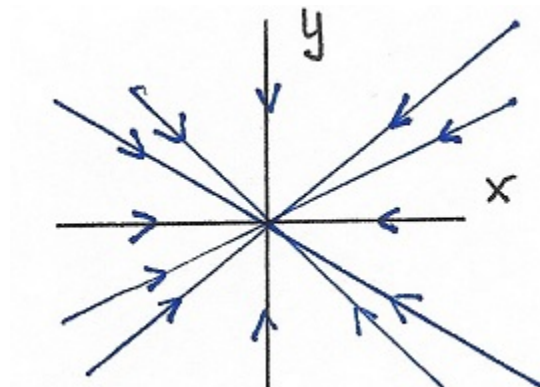


FIGURA 1. Diagrama de fases.

Observemos que las trayectorias se acercan todas al origen, cada una con una pendiente distinta. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 1. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ y' &= \lambda y \end{aligned}$$

con $\lambda < 0$, se dice que el **punto de equilibrio** $(0, 0)$ es un punto de **estrella estable**.

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de la matriz A sean un único autovalor doble, con dos autovectores asociados, $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$ **Ejercicio.** En este caso comprueba que el diagrama de fases que se obtiene es:

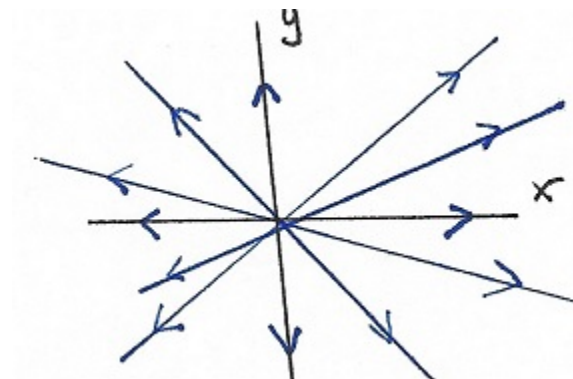


FIGURA 2. Diagrama de fases.

Observemos que las trayectorias se **alejan** todas del origen, cada una con una pendiente distinta. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 2. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ y' &= \lambda y \end{aligned}$$

con $\lambda > 0$, se dice que el **punto de equilibrio** $(0,0)$ es un punto de **estrella inestable**.

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de la matriz A sean un único autovalor doble, con dos autovectores asociados, $\lambda > 0$.

Matrices con un autovalor doble, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En este caso la matriz fundamental de soluciones es:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

y por tanto las soluciones del sistema son de la forma:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

$$y(t) = c_2 e^{\lambda t}$$

De forma general, independientemente del signo de λ , se tiene que:

- las soluciones con $c_2 = 0$, es decir $c_1 e^{\lambda t}(1, 0)$, dan como trayectorias los dos semiejes del eje de las "x".
-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{c_2 \lambda e^{\lambda t}}{(c_1 \lambda + c_2) e^{\lambda t} + c_2 \lambda t e^{\lambda t}} =$$

$$\frac{c_2 \lambda}{(c_1 \lambda + c_2) + c_2 \lambda t} = \frac{a}{b + at} \rightarrow_{t \rightarrow \pm \infty} 0$$

para todo $c_2 \neq 0$.

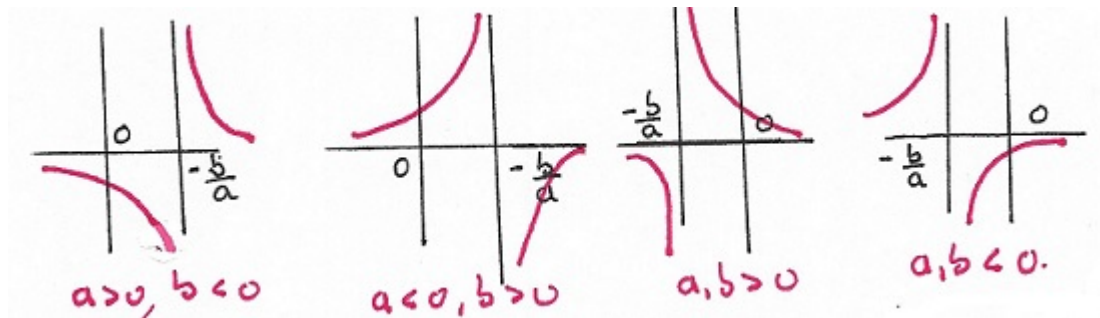


FIGURA 3. $f(t) = \frac{a}{b+at}$.

- En nuestro caso $\frac{-b}{a} = -\frac{c_1\lambda + c_2}{\lambda c_2} = -\frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda}$ y observemos que las soluciones en este punto verifican que

$$\begin{aligned} x\left(-\frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{-c_2}{\lambda} e^{\frac{-c_1}{c_2}\lambda - 1} \\ y\left(-\frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda}\right) &= c_2 e^{\frac{-c_1}{c_2}\lambda - 1} \end{aligned}$$

y por tanto $y\left(-\frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda}\right) = -\lambda x\left(-\frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda}\right)$. Es decir, es un punto de la recta $y = -\lambda x$. Y se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \rightarrow_{t \rightarrow -\frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda}} \pm \infty.$$

Así las trayectorias comienzan y terminan con pendiente nula y en algún punto de la recta $y = -\lambda x$ tienen pendiente vertical.

Si $\lambda < 0$

Puntos de equilibrio. Es claro que el $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio.

Límites.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, e^{\lambda t} c_2) = (0, 0).$$

Las trayectorias **entran** a cero, además con pendiente nula (como hemos visto antes). Por otro lado

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, e^{\lambda t} c_2) = (\pm \infty, \pm \infty).$$

Las trayectoria viene de infinito también con pendiente nula.

Regiones de crecimiento. Por un lado tenemos $y' = 0 = \lambda y$ que coincide con las trayectorias sobre el eje de las "x". La y decrece en el semiplano superior y crece el inferior (ver figura)

Por otro lado, $x' = 0 = \lambda x + y$, es la recta $y = -\lambda x$. Aquí es donde podemos encontrar tangentes verticales a las trayectorias (algo que ya sabíamos previamente). Además, a la derecha de esta recta la x decrece y crece a su izquierda (ver figura).

Con los datos anteriores tenemos un diagrama de fases:

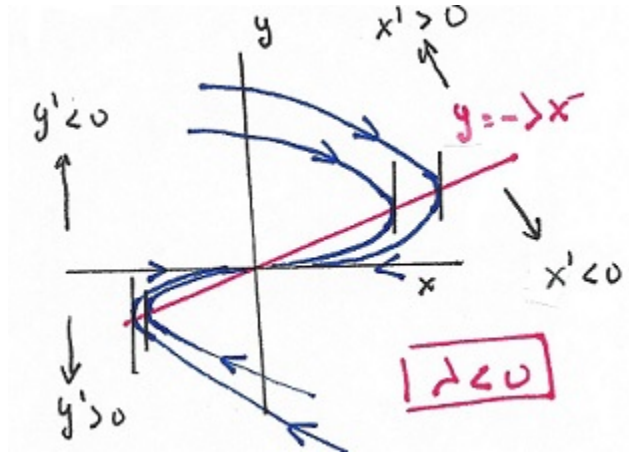


FIGURA 4. Diagrama de fases.

Observemos que las trayectorias se **acercan** todas al origen, con una pendiente igual a la del único autovector. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 3. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + y \\ y' &= \lambda y \end{aligned}$$

con $\lambda < 0$, se dice que el **punto de equilibrio** $(0,0)$ es un **nodo impropio estable**.

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de la matriz A sean un único autovalor doble, con un único autovector asociado, $\lambda > 0$.

Si $\lambda > 0$ **Ejercicio.** Comprueba que en este caso el diagrama de fases es de la forma:

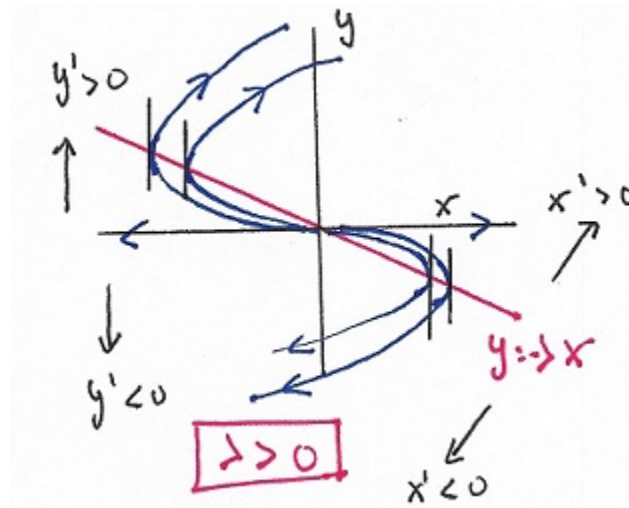


FIGURA 5. Diagrama de fases.

Observemos que las trayectorias se **alejan** todas del origen, con una pendiente igual a la del único autovector. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 4. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + y \\ y' &= \lambda y \end{aligned}$$

con $\lambda > 0$, se dice que el **punto de equilibrio** $(0,0)$ es un **nodo impropio inestable**.

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de la matriz A sean un único autovalor doble, con un único autovector asociado, $\lambda > 0$.

Ejercicio. Comprueba que en este caso el diagrama de fases es de la forma:

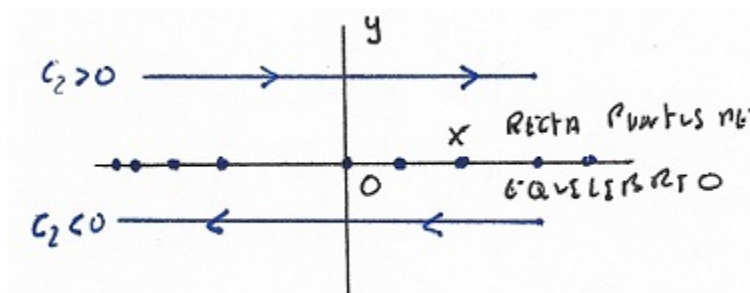


FIGURA 6. Diagrama de fases.

donde todos los puntos de la recta $y = 0$ son puntos de equilibrio. Y las trayectorias son todas rectas horizontales.

Sistemas con un único autovalor real.

Consideramos el problema

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

cuya matriz A de coeficientes tiene como autovalor a $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ o bien $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ es la matriz de Jordan semejante a A , ya sabemos resolver el problema $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}' = J \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$. También sabemos que hay una **matriz de paso**

$$Q = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix},$$

cuyas columnas $v_1 = (q_1, q_3)$ y $v_2 = (q_2, q_4)$ son dos autovectores o bien v_1 es un autovector y v_2 es un vector que verifica que $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$

(ver apuntes sobre la **Matriz de Jordan**). Entonces las soluciones del problemas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

Es decir las soluciones de nuestro sistema son o bien

$$(x(t), y(t)) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2 = e^{\lambda t} (c_1 v_1 + c_2 v_2),$$

(trayectorias semiejes de rectas vectoriales) o bien de la forma

$$(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Para representar el **diagrama de fases** de nuestro problema en A , solo hay que representar las curvas paramétricas solución en el plano.

En el caso $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, los diagramas que obtenemos son análogos a los del caso J . Rectas que entran ($\lambda < 0$) o salen ($\lambda > 0$) al/del origen $(0, 0)$. Por tanto el **origen** es en todo caso un **punto estrellado**.

En el caso $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, también podemos usar que las soluciones del problema en A son las soluciones del problema en J transformadas por la matriz de paso Q . Así teniendo en cuenta la Proposición 1. de dos lecciones atrás, sabemos que:

- los **puntos de equilibrio** del sistema ($0 = Ax_0$) son los puntos de equilibrio (y_0) del sistema en J transformados por Q ,

$$x_0 = Qy_0.$$

Así si $\lambda = 0$, los puntos de equilibrio sobre la recta $\bar{y} = 0$ se convierten en los puntos de la recta con dirección v_1 . Si $\lambda \neq 0$, entonces el **origen** es el único punto de equilibrio y es un **nodo impropio**.

- Las trayectorias sobre los **semiejes de la recta** $y = 0$ en J , se transforman en trayectorias sobre los semiejes de la **recta vectorial con dirección** v_1 .
- Los **límites**, cuando $t \rightarrow \pm\infty$, a **cero o infinito se conservan** y como

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{\frac{q_1}{q_3} + \frac{q_2 \bar{y}'(t)}{q_3 \bar{x}'(t)}} + \frac{1}{\frac{q_1}{q_4} \frac{\bar{x}'(t)}{\bar{y}'(t)} + \frac{q_2}{q_4}},$$

las **trayectorias entran o salen de cero** con **pendiente** $\frac{q_3}{q_1}$ (la **pendiente de** v_1) y en el infinito las pendientes tienden también a $\frac{q_3}{q_1}$ (recordemos que en el caso J $dy/dx \rightarrow_{t \rightarrow \pm\infty} 0$).

- **Regiones de crecimiento.** Las rectas $ax + by = 0$ y $cx + dy = 0$ dividen el plano en distintas regiones de crecimiento. En el caso J éstas quedan enmascaradas por que coinciden con los cuadrantes del plano.

Observemos que sobre la recta $cx + dy = 0$ las trayectorias tienen rectas **tangentes horizontales** (ya que $\frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$) y sobre la recta $ax + by = 0$ las trayectorias tienen rectas **tangentes verticales** (ya que $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \pm\infty$)

Ejemplo 1. Vamos a dibujar el **diagrama de fases** del sistema

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}y \\y' &= \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}y\end{aligned}$$

Autovalores. Resolvemos la **ecuación característica**:

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{8}{3} + \lambda)(\frac{10}{3} + \lambda) + \frac{1}{9} = (\lambda + 3)^2.$$

Luego $\lambda = -3$ es un autovalor doble.

Autovectores. .- Para $\lambda = -3$ tenemos el sistema $(-\frac{8}{3} + 3)x - \frac{1}{3}y = 0$ que es equivalente a $x = y$ y por tanto $v_1 = (1, 1)$ es un autovector. Pero solo hay uno linealmente independiente. Así la matriz de Jordan semejante es

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matriz de Paso. La matriz que buscamos es $Q = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 1 & s \end{pmatrix}$ donde

$$A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = v_1 - 3 \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

Nos queda el sistema $\frac{1}{3}r - \frac{1}{3}s = 1$. El vector $v_2 = (1, -2)$ es una solución. Así

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluciones del sistema. La solución general de nuestro sistema es:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= Qe^{Jt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix} = \dots\dots\dots \\&\dots = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} t + 1 \\ t - 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Ahora podemos representar todas estas curvas paramétricas para representar el diagrama de fases. O podemos usar la información que tenemos.

Punto de equilibrio. El único punto de equilibrio es el **origen** $(0, 0)$, (ya que $\lambda = -3 \neq 0$). Que además es un **nodo impropio estable** (ya que $\lambda < 0$).

Trayectorias rectas. La dirección v_1 es soporte de las trayectorias rectas (transformación de la recta $\bar{y} = 0$ del problema en J por la matriz Q).

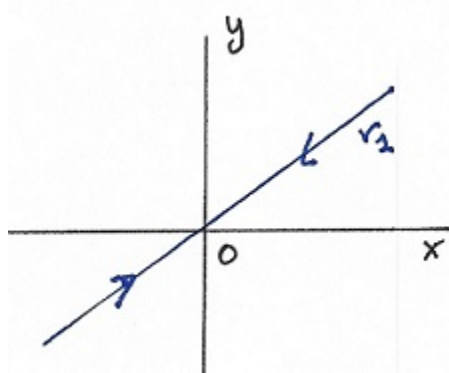


FIGURA 7. Trayectorias rectas.

Límites. Como se conservan los límites del caso J a través de Q

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (\pm\infty, \pm\infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$$

Las trayectorias entra al origen. Y como sabemos que

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{\frac{q_1}{q_3} + \frac{q_2}{q_3} \frac{\bar{y}'(t)}{\bar{x}'(t)}} + \frac{1}{\frac{q_1}{q_4} \frac{\bar{x}'(t)}{\bar{y}'(t)} + \frac{q_2}{q_4}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \frac{\bar{y}'(t)}{\bar{x}'(t)}} + \frac{1}{\frac{1}{-2} \frac{\bar{x}'(t)}{\bar{y}'(t)} + \frac{1}{-2}}.$$

Tenemos que

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 1,$$

las trayectorias entran al origen con pendiente la de v_1 . Tenemos que

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \rightarrow_{t \rightarrow -\infty} 1,$$

las trayectorias salen del infinito con pendiente la de v_1 .

Regiones de crecimiento. Recta de **tangentes verticales**:

$$0 = x' = -\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}y \quad \Leftrightarrow \quad -8x = y.$$

Un vector sobre esta recta es $(-1, 8)$.

Recta de **tangentes horizontales**:

$$0 = y' = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}y \quad \Leftrightarrow \quad x = 10y.$$

Un vector sobre esta recta es $(10, 1)$. Así tenemos las regiones:

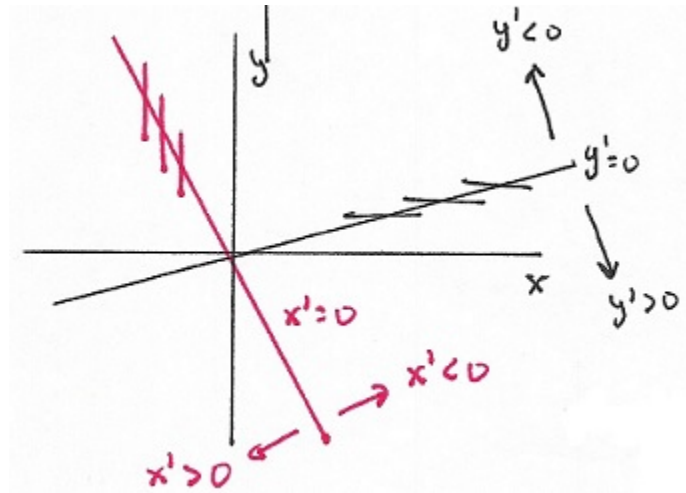


FIGURA 8. Regiones de crecimiento.

Diagrama de Fases. Con toda la información anterior, podemos representar las trayectorias de las soluciones:

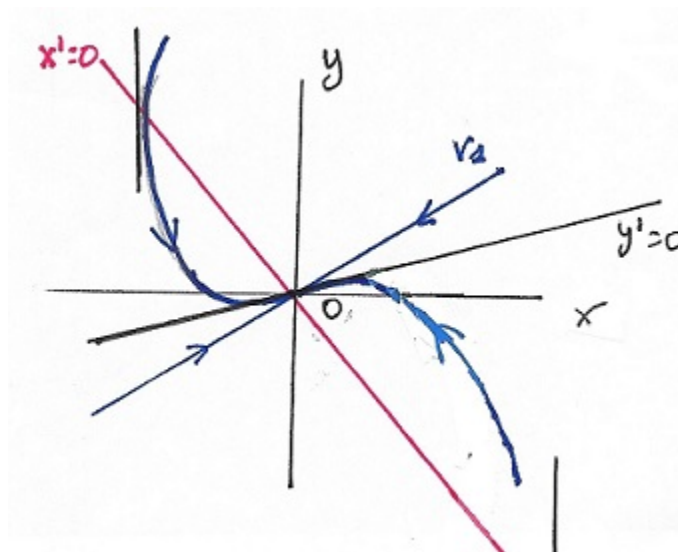


FIGURA 9. Diagrama de Fases.