ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE E.D.O. II

El juego de las derivadas.

El Teorema de la Función Inversa.

Dada una E.D.O. de primer orden

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

ésta se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)).$$

Jugando con las "diferenciales" (dx y dy) como si fuesen números, podemos escribir

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x(y), y)} \qquad \Leftrightarrow \qquad x'(y) = \frac{1}{f(x(y), y)}.$$

Lo anterior tiene sentido por el Teorema de la Función Inversa. Si $y = f(x)$ (o simplemente y es función de x, escribimos $y(x)$), entonces $x = f^{-1}(y)$ (o simplemente x es función de y, escribimos $x(y)$). El Teorema de la Función Inversa nos dice que si f es derivable de derivada no nula, entonces

$$x'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\, f^{-1}(y)\,)} = \frac{1}{y'(x)}.$$

A veces una E.D.O., al invertirla llegamos a otra E.D.O. que podemos resolver.

Ejemplo 1. *Nos dan la E.D.O.* $x = \frac{2y}{y'} + \frac{1}{3y^3}$, *o jugando con los diferenciales*

$$(\frac{1}{2y} - \frac{1}{6y^4 x})dy = \frac{dx}{x},$$

y nos piden integrarla.

Despejando y' tenemos que

$$\frac{1}{y'} = (x - \frac{1}{3y^3})\frac{1}{2y}$$

y así

$$y' = \frac{6y^4}{3xy^3 - 1}.$$

Esta E.D.O. no es lineal, ni de variables separadas. No es homogénea, ni de Bernoulli. Ahora si nos fijamos en

$$\frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} = x'(y) = (x - \frac{1}{3y^3})\frac{1}{2y} = x(y)\frac{1}{2y} - \frac{1}{6y^4},$$

entonces vemos que esta última E.D.O. en x' es líneal y sabemos resolverla.

Resolvemos la ecuación homogénea $x'(y) = x(y)\frac{1}{2y}$ cuya solución es

$$x(y) = K\sqrt{y} \qquad \text{para todo} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Después usamos el método de variación de las constantes; ponemos $x_1(y) = K(y)\sqrt{y}$ y llegamos a que

$$x_1(y) = \frac{1}{21}\frac{1}{y^3}$$

es una solución particular de la ecuación. Luego la solución general de la E.D.O. es

$$x(y) = K\sqrt{y} + \frac{1}{21}\frac{1}{y^3} \qquad \text{para todo} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Si despejamos la y en función de la x tendríamos las soluciones de $x = \frac{2y}{y'} + \frac{1}{3y^3}$. Pero no hace falta. La familia de **curvas solución** de nuestra E.D.O. (en x o en y es equivlente) viene dada en **ecuaciones implícitas** por:

$$x - K\sqrt{y} - \frac{1}{21}\frac{1}{y^3} = 0 \qquad \text{para todo} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Ecuaciones no resueltas respecto de la derivada.

Podemos encontrar una E.D.O. de la forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

Por ejemplo:

- $F(x, y, y') = x - \dfrac{2y}{y'} - \dfrac{1}{3y^3} = 0$. Es la E.D.O. del ejemplo anterior (aquí si podemos despejar y').
- $F(x, y, y') = y'^5x^3 - y'^3y^2x^2 - 2y'yx^5 - 3 = 0$ En esta E.D.O. no podemos depejar la y'. Y decimos que es una **E.D.O. no resuelta respecto de la derivada**.

El Teorema de la Función Implícita (Cálculo Diferencial) nos dice que si $F \in C^1$ y $\frac{\partial F}{\partial x_3} = \frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, entonces existe f función real de (x, y) tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$; luego $y' = f(x, y)$. Así tenemos despejada

la y'. Claro que como no sabemos como es f en concreto, no podemos seguir.

En algunos casos, aunque no podemos despejar la y' si podemos encontrar la solución de la E.D.O.

Ecuación de Lagrange.

Definición 1. *Dadas dos funciones $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una E.D.O. de primer orden de la forma*

$$y = xg_1(y') + g_2(y')$$

*se llama **ecuación de Lagrange**.*

Derivando

$$y' = g_1(y') + xg_1'(y')y'' + g_2'(y')y''.$$

Si ponemos $z = y'$, tenemos

$$z(x) - g_1(z(x)) = [xg_1'(z(x)) + g_2'(z(x))]\frac{dz}{dx}.$$

Ahora si invertimos y ponemos $\frac{dx}{dz}$ llegamos (**Ejercicio**) a una ecuación lineal. Resolvemos esta ecuación y tendremos que $x = h(z)$, por tanto $y' = z = h^{-1}(x)$. Nuestra solución será

$$y(x) = \int h^{-1}(x)dx + K.$$

Teóricamente funciona. En la práctica, g_1 y g_2 deben ser muy sencillas para que se puedan realizar los cálculos. Un ejemplo de ellos es

Ecuación de Clairaut.

Definición 2. *Dada una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una E.D.O. de primer orden de la forma*

$$y = xy' + g(y')$$

*se llama **ecuación de Clairaut**.*

Derivando

$$y' = y' + xy'' + g'(y')y'' \qquad \Leftrightarrow \qquad y''[x + g'(y')] = 0.$$

Cuyas soluciones son

$$\begin{array}{ccc} y'' = 0 & \Rightarrow & y(x) = ax + b \\ x + g'(y') = 0 & \Rightarrow & y(x) = \int (g')^{-1}(-x)dx + K. \end{array}$$

Este es un ejemplo de E.D.O. donde **se infringe la unicidad de soluciones**. La familia $y(x) = ax + b$ son todas las rectas del plano o un haz de rectas si hay alguna relación entre a y b. La segunda solución $y(x) = \int (g')^{-1}(-x)dx$ es una curva tangente a todas estás rectas,¿por qué? (**Curva envolvente** según la Geometría Diferencial).

Ejemplo 2. *Ver el problema* ***5*** *de la* ***Hoja I*** *de problemas y su solución en la* ***Práctica 3.***

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es